$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

or $\quad v = \omega R \Leftrightarrow \omega = \dfrac{v}{R}$ — que des angles droits

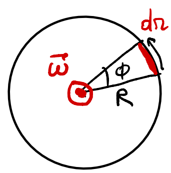
d'où $\quad \|\vec{a}\| = \|\vec{\omega}\|^2 \times \|\vec{r}\|$

$$= \frac{v^2}{R^2} \times R = \frac{v^2}{R}$$

Mvt circulaire uniforme ($R = c^{ste}$, $v = c^{ste}$)

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\hat{n}$$

$$\|\vec{a}_n\| = \frac{v^2}{R}$$



$\omega = \dot{\phi}$

$v = \dot{\phi} \cdot R$

$dr = R\,d\phi$

$\dfrac{dr}{dt} = R\dfrac{d\phi}{dt} = R\omega$

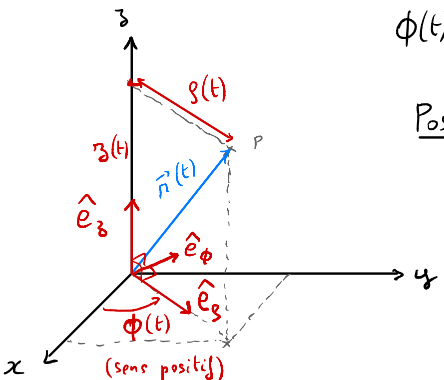
I) Coordonnées cylindriques

1) On munit d'abord le référentiel choisi d'un repère cartésien, orthonormée direct : $O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$

2) Quand utiliser les coordonnées cylindriques

$\rightarrow$ Cela dépend des contraintes, par exemple $\rho(t) = $ constante

3)



$\phi(t)$ est l'angle entre $\hat{e}_x$ et $\hat{e}_\rho$ (aussi entre $\hat{e}_y$ et $\hat{e}_\phi$)

Position : $\vec{r}(t) = (\vec{r}\cdot\hat{e}_\rho)\hat{e}_\rho + (\vec{r}\cdot\hat{e}_\phi)\hat{e}_\phi + (\vec{r}\cdot\hat{e}_z)\hat{e}_z$

$$= \rho(t)\,\hat{e}_\rho + 0 + z(t)\,\hat{e}_z$$

Vitesse : Attention, le repère $O, \hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z$ dépend du temps

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left[\rho(t)\,\hat{e}_\rho(t) + z(t)\,\hat{e}_z\right]$$

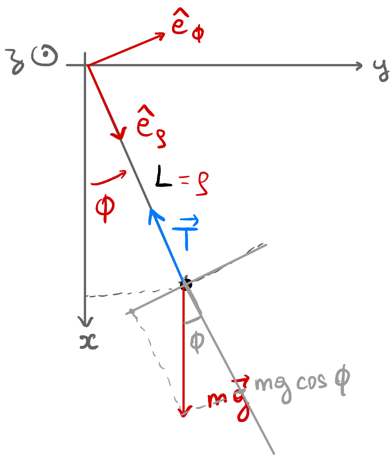
$$= \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\,\dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z}\,\hat{e}_z$$

Or $\quad \dot{\hat{e}}_\rho = \vec{\omega}(t) \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi}\,\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$

d'où : $\quad \vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{z}\,\hat{e}_z$

On trouve ensuite $\quad \vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$

Exemple : le pendule rigide = point matériel lié par une tige à un axe de rotation.



* **Deux contraintes** :
  - $z(t) = 0$
  - $\rho(t) = L$

* **Forces** : $m\vec{g}$ (pesanteur)
et la force de liaison (associée à la contrainte)

$$\vec{T} = -T\,\hat{e}_\rho$$

2ème loi : $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$

Projections :

* selon $\hat{e}_\rho$: $m\vec{g}\cdot\hat{e}_\rho + \vec{T}\cdot\hat{e}_\rho = m\vec{a}\cdot\hat{e}_\rho$

$$mg\cos\phi - T = -mL\dot{\phi}^2 \quad (1) \qquad \text{2 inconnu } \phi, T$$

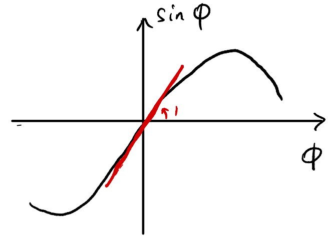
* selon $\hat{e}_\phi$: $-mg\sin\phi = mL\ddot{\phi} \quad (2)$
* selon $\hat{e}_z$: $\ddot{z}=0$, $\dot{z}=0$, $z=0$

L'équation (2) permet de résoudre $\phi(t)$: $\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\sin\phi = 0$

Pour des petits angles $\phi(t) \ll 1$ [rad] : $\sin\phi \simeq \phi$

alors : $\ddot{\phi} + \omega_0^2\,\phi = 0$ où la pulsation vaut $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}$

(oscillation sinusoïdale)



On peut ensuite utiliser (1) pour calculer $\vec{T}$ à tout instant.

II) Coordonnées sphériques (voir animation) : $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$ trièdre direct

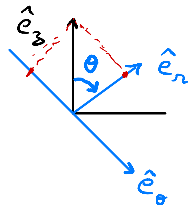
Position : $\boxed{\vec{r}(t) = r(t)\,\hat{e}_r}$

Vitesse : $\vec{v}(t) = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r$ or $\dot{\hat{e}}_r = \vec{\omega}\wedge\hat{e}_r = \vec{\omega}_\theta\wedge\hat{e}_r + \vec{\omega}_\phi\wedge\hat{e}_r$

(deux rotations lorsque θ et ϕ changent)

• $\vec{\omega}_\theta$ est le vecteur rotation associé au changement de θ

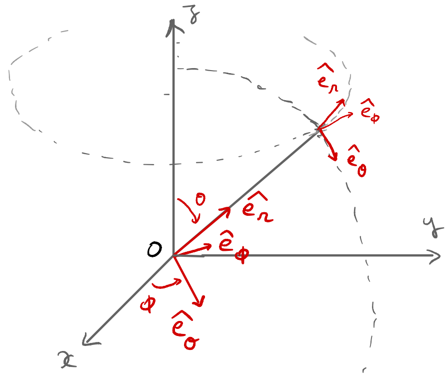
$$\vec{\omega}_\theta = \dot{\theta}\, \hat{e}_\phi$$



• $\vec{\omega}_\phi = \dot{\phi}\, \hat{e}_z$ or $\hat{e}_z = \cos\theta\, \hat{e}_r - \sin\theta\, \hat{e}_\theta$

Ainsi : $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\, \hat{e}_r + r\left(\vec{\omega}_\theta \wedge \hat{e}_r + \vec{\omega}_\phi \wedge \hat{e}_r\right)$

$$\vec{v} = \dot{r}\, \hat{e}_r + r\dot{\theta}\, \hat{e}_\theta + r\sin\theta\, \dot{\phi}\, e_\phi$$



On trouve ensuite :

$$\begin{aligned}\vec{a} = {} & \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r \\ & + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta\right)\hat{e}_\theta \\ & + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{e}_\phi\end{aligned}$$