

Analyse I – Série 4

Echauffement 1. (Formule d'Euler)

Vérifier les égalités suivantes :

$$(i) e^{-i\pi/2} = -i \qquad (ii) e^{-i\pi} = -1 \qquad (iii) \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$$

Echauffement 2. (Forme Polaire)

Calculer le module des nombres complexes suivants.

$$a) e^{i+1} \qquad b) e^{-(i+1)} \qquad c) e^{-(i-1)} \qquad d) e^{(i-50)} \qquad e) e^{(1-50i)}$$

Exercice 1. (Partie réelle et partie imaginaire)

Trouver la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{lll} a) (2 - 3i)(3 + 2i) & b) \frac{2 - 3i}{4 - 5i} & c) \left(\frac{1}{i}\right)^{4567} \\ d) (1 + i\sqrt{3})^{10} & e) \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1+3i} & f) \frac{2 - 3i}{2+i} + \frac{1-i}{1+3i} \\ g) \frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{4 + 3i} & h) \frac{3i^{30} - i^{19}}{-1 + 2i} & i) \left(\frac{10 - 15i}{2+i}\right) \left(\frac{1+i}{1-3i}\right) \end{array}$$

Exercice 2. (Module et argument)

Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants.

$$a) 2 + 2i \qquad b) -1 + i\sqrt{3} \qquad c) -1 + i \operatorname{tg}(3) \qquad d) \frac{8i^{21} - 2i^{11}}{1 - i} \qquad e) 2^i$$

Exercice 3. (Racines de nombres complexes)

Trouver toutes les solutions des équations suivantes dans \mathbb{C} ,

$$a) z^5 = 1 \qquad b) z^2 = -3 + 4i \qquad c) z^4 = -2i \qquad d) z^3 = -\sqrt{3} + i$$

Représenter les résultats graphiquement.

Exercice 4. (Equations polynomiales)

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} :

$$a) z^2 + 6z + 12 - 4i = 0 \qquad b) z^6 - 2z^3 + 2 = 0$$

Exercice 5. (Encore une équation)

Trouver la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de tous les nombres complexes z qui satisfont l'équation

$$z^2 = \left(1 + \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^8.$$

Exercice 6. (Décomposition d'un polynôme)

Décomposer le polynôme $z^6 + 1$ en produit de facteurs irréductibles complexes et en produit de facteurs irréductibles réels.

Exercice 7. (Sous-ensembles de \mathbb{C})

Démontrer l'égalité suivante :

$$\left\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : (z \neq 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0) \text{ ou } |z| = 1\right\}.$$

Exercice 8. (V/F : Nombres complexes)

Répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Q1 : Le polynôme $z^2 + 1$ divise $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1$.

Q2 : Soient z_1, \dots, z_n les racines complexes du polynôme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ avec $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Alors on a $\prod_{j=1}^n z_j = (-1)^n a_0$.

Q3 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + i\sqrt{3})^n$ est un imaginaire pur (c'est-à-dire sa partie réelle est nulle).

Q4 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 - i\sqrt{3})^n$ est réel.

Exercice 9. (QCM : Racines de nombres complexes)

L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 = \frac{(3+3i)^3}{2i+2}$ est

$$\begin{array}{ll} \square \left\{ -3i, \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i), -\frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i) \right\} & \square \left\{ 3i, \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i), -\frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i) \right\} \\ \square \left\{ -3i, \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), -\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i) \right\} & \square \left\{ 3i, \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i), -\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i) \right\} \end{array}$$