

Analyse I – Série 4

Echauffement 1. (Formule d'Euler)

Vérifier les égalités suivantes :

$$(i) e^{-i\pi/2} = -i \qquad (ii) e^{-i\pi} = -1 \qquad (iii) \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$$

Sol. :

$$(i) e^{-i\pi/2} = \cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2) = 0 + i(-1) = -i$$

$$(ii) e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) = -1 + i(0) = -1$$

$$(iii) \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$$

Echauffement 2. (Forme Polaire)

Calculer le module des nombres complexes suivants.

$$a) e^{i+1} \qquad b) e^{-(i+1)} \qquad c) e^{-(i-1)} \qquad d) e^{(i-50)} \qquad e) e^{(1-50i)}$$

Sol.:

On va utiliser que pour $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$|e^z| = (e^z \overline{e^z})^{1/2} = (e^z e^{\bar{z}})^{1/2} = (e^{z+\bar{z}})^{1/2} = e^{\frac{z+\bar{z}}{2}} = e^{\operatorname{Re}(z)} = e^a.$$

$$a) |e^{i+1}| = e^1 = e \qquad b) |e^{-(i+1)}| = e^{-1} = \frac{1}{e} \qquad c) |e^{-(i-1)}| = e^1 = e$$

$$d) |e^{(i-50)}| = e^{-50} \qquad e) |e^{(1-50i)}| = e^1 = e$$

Exercice 1. (Partie réelle et partie imaginaire)

Trouver la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

$$a) (2 - 3i)(3 + 2i) \qquad b) \frac{2 - 3i}{4 - 5i} \qquad c) \left(\frac{1}{i}\right)^{4567}$$

$$d) (1 + i\sqrt{3})^{10} \qquad e) \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1+3i} \qquad f) \frac{2 - 3i}{2 + i} + \frac{1 - i}{1 + 3i}$$

$$g) \frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{4 + 3i} \qquad h) \frac{3i^{30} - i^{19}}{-1 + 2i} \qquad i) \left(\frac{10 - 15i}{2 + i}\right) \left(\frac{1 + i}{1 - 3i}\right)$$

Sol.: Les résultats ci-après sont écrits sous la forme $z = a + ib$, et on a $\operatorname{Re}(z) = a$ et $\operatorname{Im}(z) = b$.

a) $z = (2 - 3i)(3 + 2i) = 12 - 5i$

b) $z = \frac{2 - 3i}{4 - 5i} = \frac{2 - 3i}{4 - 5i} \frac{4 + 5i}{4 + 5i} = \frac{23}{41} - i \frac{2}{41}$

c) $z = \left(\frac{1}{i}\right)^{4567} = e^{i\frac{3\pi}{2}4567} = e^{i\frac{13701\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i = 0 + i$

d) On a que $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où

$$\begin{aligned} z &= (1 + \sqrt{3}i)^{10} = 2^{10} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} = 2^{10} \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{10} \\ &= 2^{10} e^{i\frac{10\pi}{3}} = 2^{10} e^{i\frac{4\pi}{3}} = -2^{10} e^{i\frac{\pi}{3}} = -2^{10} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \end{aligned}$$

et ainsi $\operatorname{Re}(z) = -2^9 = -512$ et $\operatorname{Im}(z) = -512\sqrt{3}$.

e) $z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1+3i} = \frac{1-i}{2} + \frac{1-2i}{5} + \frac{1-3i}{10} = \frac{4}{5} - i\frac{6}{5}$

f) $z = \frac{2-3i}{2+i} + \frac{1-i}{1+3i} = \frac{(2-3i)(2-i)}{5} + \frac{(1-i)(1-3i)}{10} = 0 - 2i$

g) $z = \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} = \frac{(5+5i)(3+4i)}{25} + \frac{20(4-3i)}{25} = 3 - i$

h) $z = \frac{3i^{30} - i^{19}}{-1+2i} = \frac{3i^2 - i^3}{-1+2i} = \frac{-3+i}{-1+2i} = \frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{5} = 1 + i$

i) $z = \left(\frac{10-15i}{2+i}\right) \left(\frac{1+i}{1-3i}\right) = (1-8i) \left(-\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}\right) = 3 + 2i$

Exercice 2. (Module et argument)

Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants.

a) $2 + 2i$ b) $-1 + i\sqrt{3}$ c) $-1 + i \operatorname{tg}(3)$ d) $\frac{8i^{21} - 2i^{11}}{1 - i}$ e) 2^i

Sol.:

Les résultats ci-dessous sont écrits sous la forme $z = \rho e^{i\varphi}$, et on a $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \varphi$.

a) $z = 2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) $z = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$

c) $z = -1 + i \operatorname{tg}(3) = -1 + i \frac{\sin(3)}{\cos(3)} = \frac{1}{|\cos(3)|} \left(\cos(3) - i \sin(3)\right) = \frac{1}{|\cos(3)|} e^{-3i}$
 $= \frac{1}{|\cos(3)|} e^{i(2\pi-3)}$

$$d) \quad z = \frac{8i^{21} - 2i^{11}}{1 - i} = \frac{8i - 2i^3}{1 - i} = \frac{8i + 2i}{1 - i} = 10i \frac{1}{1 - i} = 10i \frac{1 + i}{2} = 5\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ = 5\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$e) \quad z = 2^i = e^{i \operatorname{Log}(2)}$$

Exercice 3. (Racines de nombres complexes)

Trouver toutes les solutions des équations suivantes dans \mathbb{C} ,

$$a) \quad z^5 = 1$$

$$b) \quad z^2 = -3 + 4i$$

$$c) \quad z^4 = -2i$$

$$d) \quad z^3 = -\sqrt{3} + i$$

Représenter les résultats graphiquement.

Sol.:

a) On utilise que $1 = e^{i2\pi n}$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Les solutions recherchées sont donc $z_{n+1} = e^{i\frac{2\pi n}{5}}$ avec $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (voir Fig. 1a).

b) En écrivant $z = a + ib$, l'équation donnée devient $a^2 - b^2 + 2abi = -3 + 4i$. Puisque a et b sont réels, on doit résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

La deuxième équation implique que a et b sont non-nuls et donc $b = \frac{2}{a}$. En insérant ceci dans la première équation on obtient

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

Puisque $a \in \mathbb{R}$, seulement la première solution est possible; on a donc $a = \pm 1$ et $b = \pm 2$. Ainsi les solutions de l'équation initiale sont $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = -1 - 2i$ (voir Fig. 1b).

c) On utilise que $-i = e^{i(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n)}$ pour $n = 0, 1, 2, 3$. Les solutions recherchées sont donc $z_{n+1} = \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n)}$ avec $n = 0, 1, 2, 3$ (voir Fig. 1c).

d) On a que $-\sqrt{3} + i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2 e^{i(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n)}$ pour $n = 0, 1, 2$. Les solutions recherchées sont donc $z_{n+1} = \sqrt[3]{2} e^{i(\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n)}$ avec $n = 0, 1, 2$ (voir Fig. 1d).

Exercice 4. (Equations polynomiales)

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} :

$$a) \quad z^2 + 6z + 12 - 4i = 0$$

$$b) \quad z^6 - 2z^3 + 2 = 0$$

Sol.:

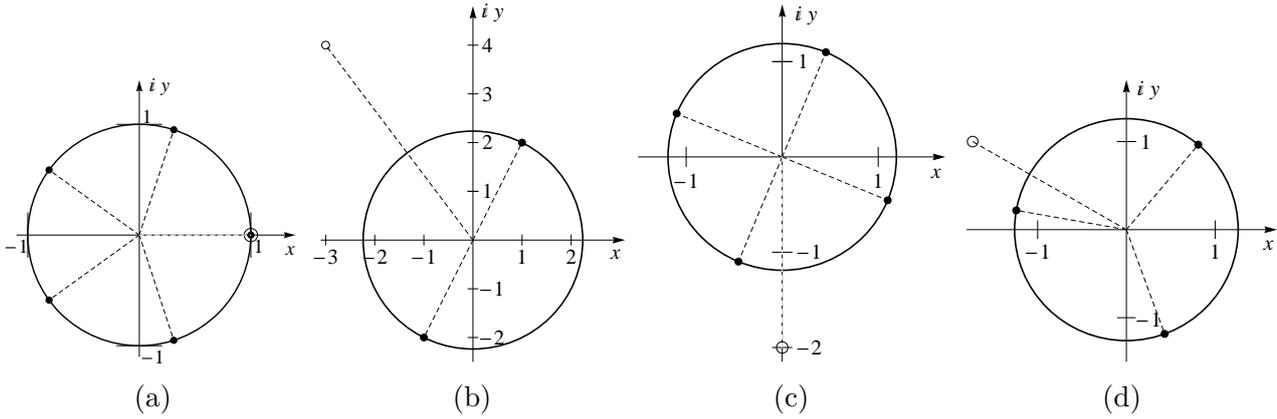


FIGURE 1 – Solution de l'exercice 3 (représentation graphique).

a) Méthode 1 : On pose $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ qu'on met dans l'équation donnée :

$$(a + ib)^2 + 6(a + ib) + 12 - 4i = 0,$$

d'où le système d'équations

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 6a + 12 = 0 \\ 2ab + 6b - 4 = 0. \end{cases}$$

De la première équation on obtient

$$a = -3 \pm \sqrt{b^2 - 3},$$

et donc $|b| \geq \sqrt{3}$ car a doit être réel. On peut alors récrire la deuxième équation du système comme

$$a = \frac{2}{b} - 3$$

et on trouve

$$-3 \pm \sqrt{b^2 - 3} = \frac{2}{b} - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \pm \sqrt{b^2 - 3} = \frac{2}{b},$$

d'où

$$b^2 - 3 = \frac{4}{b^2},$$

ou encore

$$(b^2)^2 - 3b^2 - 4 = (b^2 - 4)(b^2 + 1) = 0.$$

On a alors $b = \pm 2$ car b doit être réel. Les solutions de l'équation initiale sont donc

$$z_1 = -2 + 2i$$

$$z_2 = -4 - 2i.$$

Méthode 2 : On utilise directement la formule pour l'équation quadratique vue au cours. Comme $a = 1$, $b = 6$ et $c = 12 - 4i$, on obtient

$$z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 48 + 16i}}{2} = -3 \pm \sqrt{-3 + 4i}. \quad (1)$$

On remarque que la radicande est la même qu'à l'Ex. 3b) et donc la racine vaut $\pm(1+2i)$. Puisqu'il y a déjà les deux signes dans (1), il suffit de considérer une seule racine (laquelle n'importe pas). Les solutions (1) sont alors

$$\begin{aligned} z_1 &= -3 + (1 + 2i) = -2 + 2i, \\ z_2 &= -3 - (1 + 2i) = -4 - 2i. \end{aligned}$$

b) L'équation donnée est équivalente à

$$(z^3 - 1)^2 = -1.$$

Puisque $-1 = e^{i\pi}$, il suit que $z^3 - 1 = e^{i(\frac{\pi}{2} + \pi n)}$ avec $n = 0, 1$, d'où

$$z^3 = 1 \pm i = \sqrt{2} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}.$$

Il faut alors résoudre les équations $z^3 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z^3 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ en utilisant la même technique qu'aux Ex. 3a, c, d). Les solutions sont

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{12}}, & z_2 &= \sqrt[6]{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}, & z_3 &= \sqrt[6]{2} e^{i\frac{17\pi}{12}}, \\ z_4 &= \sqrt[6]{2} e^{-i\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{23\pi}{12}}, & z_5 &= \sqrt[6]{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}, & z_6 &= \sqrt[6]{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Exercice 5. (Encore une équation)

Trouver la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de tous les nombres complexes z qui satisfont l'équation

$$z^2 = \left(1 + \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^8.$$

Sol.: Comme $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, on a

$$1 + \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 + i\sqrt{3},$$

qu'on récrit sous forme polaire :

$$1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Ainsi l'équation devient

$$z^2 = \left(2 e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^8 = 2^8 e^{i\frac{8\pi}{3}} = 2^8 e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Afin de résoudre cette équation, on écrit

$$z^2 = 2^8 e^{i(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n)}, \quad \text{avec } n = 0, 1,$$

car une équation polynomiale du deuxième degré a deux solutions. Ces solutions sont donc

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^4 e^{i\frac{\pi}{3}} = 16 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8 + i8\sqrt{3}, \\ z_2 &= 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - i8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Les quantités recherchées sont alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1) &= 8, & \operatorname{Im}(z_1) &= 8\sqrt{3}, & |z_1| &= 16, & \arg(z_1) &= \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{Re}(z_2) &= -8, & \operatorname{Im}(z_2) &= -8\sqrt{3}, & |z_2| &= 16, & \arg(z_2) &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 6. (Décomposition d'un polynôme)

Décomposer le polynôme $z^6 + 1$ en produit de facteurs irréductibles complexes et en produit de facteurs irréductibles réels.

Sol.: Pour la décomposition en facteurs irréductibles complexes il faut utiliser que $-1 = e^{i(\pi+2\pi n)}$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Les racines complexes sont donc

$$z_{n+1} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n)}, \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, & z_2 &= e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})} = i, & z_3 &= e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \\ z_4 &= e^{i(\frac{\pi}{6} + \pi)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}, & z_5 &= e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = -i, & z_6 &= e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$z^6 + 1 = \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \left(z - i\right) \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \left(z + i\right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right).$$

Puisque l'équation est à coefficients réels, ses racines complexes sont deux à deux complexes conjuguées : $z_1 = \bar{z}_6$, $z_2 = \bar{z}_5$ et $z_3 = \bar{z}_4$. Pour tout nombre complexe c on a

$$(z - c)(z - \bar{c}) = z^2 - (c + \bar{c})z + c\bar{c} = z^2 - 2\operatorname{Re}(c)z + |c|^2,$$

d'où on obtient

$$z^6 + 1 = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1).$$

Exercice 7. (Sous-ensembles de \mathbb{C})

Démontrer l'égalité suivante :

$$\left\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : (z \neq 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0) \text{ ou } |z| = 1\right\}.$$

Sol. :

Pour caractériser l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\}$, on pose $z = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$. La condition devient alors

$$\rho^{i\varphi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} \in \mathbb{R},$$

ou

$$\operatorname{Im}\left(\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}\right) = \rho \sin(\varphi) - \frac{1}{\rho} \sin(\varphi) = 0.$$

Cette condition est satisfaite pour $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, ou $\rho = 1$ et φ arbitraire, donc pour les nombres de forme $z = \rho$, $z = -\rho$ et les nombres complexes de module égal à 1. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : (z \neq 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0) \text{ ou } |z| = 1\}$ contient non seulement les nombres complexes z de module 1, mais aussi les nombres réels non-nuls qui correspondent aux nombres de la forme $z = \rho$ et $z = -\rho$ avec $\rho > 0$.

Exercice 8. (V/F : Nombres complexes)

Q1 : Le polynôme $z^2 + 1$ divise $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1$.

VRAI. Noter que $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Comme $i^6 + 3i^4 + i^2 - 1 = -1 + 3 - 1 - 1 = 0$, $z - i$ divise le polynôme donné. Puisque ce dernier est à coefficients réels, il suit que $\bar{i} = -i$ en est aussi une racine et donc $z + i$ le divise aussi. Ainsi on conclut que $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ divise ce polynôme donné.

Q2 : Soient z_1, \dots, z_n les racines complexes du polynôme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ avec $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Alors on a $\prod_{j=1}^n z_j = (-1)^n a_0$.

VRAI. Comme z_1, \dots, z_n sont les racines du polynôme, on a

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

En comparant les termes de degré zéro des deux côtés de l'expression, on trouve la formule de l'énoncé.

Q3 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + i\sqrt{3})^n$ est un imaginaire pur (c'est-à-dire sa partie réelle est nulle).

FAUX. On calcule la puissance en utilisant la forme polaire

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n e^{in\pi/3} = 2^n (\cos(n\pi/3) + i \sin(n\pi/3)).$$

Ce nombre est un imaginaire pur si et seulement si $\cos(n\pi/3) = 0 \Leftrightarrow (n\pi/3 = \pi/2 + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (n = 3/2 + 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z})$. Or, cette condition ne peut être satisfaite pour k entier.

Q4 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 - i\sqrt{3})^n$ est réel.

VRAI. En utilisant de nouveau la forme polaire on obtient

$$(1 - i\sqrt{3})^n = 2^n e^{-in\pi/3} = 2^n (\cos(n\pi/3) - i \sin(n\pi/3)).$$

Ce nombre est réel si et seulement si $\sin(n\pi/3) = 0 \Leftrightarrow (n\pi/3 = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (n = 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z})$. Ainsi on peut par exemple prendre $n = 3$.

Exercice 9. (QCM : Racines de nombres complexes)

L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 = \frac{(3+3i)^3}{2i+2}$ est

$$\begin{array}{ll} \square \left\{ -3i, \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i), -\frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i) \right\} & \square \left\{ 3i, \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i), -\frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i) \right\} \\ \blacksquare \left\{ -3i, \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), -\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i) \right\} & \square \left\{ 3i, \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i), -\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i) \right\} \end{array}$$

Sol. :

On a $2i + 2 = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $3 + 3i = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, et l'on en déduit $\frac{(3+3i)^3}{2i+2} = 3^3 e^{3i\pi/4} e^{-i\pi/4} = 27e^{i\pi/2}$.

On applique ensuite la méthode du cours : les 3 solutions de l'équation $z^3 = 27e^{i(\pi/2+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$ sont données par $z_k = 3e^{i\pi/6+2ik\pi/3}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$. Autrement dit on a $z_0 = 3e^{i\pi/6}$, $z_1 = 3e^{i5\pi/6}$ et $z_2 = 3e^{i3\pi/2}$, ce qui correspond aux solutions ci-dessus écrites sous forme polaire.