Cours Euler: Corrigé 10

le 9 novembre 2022

Exercice 1

(1) Le lieu géométrique des points du plan dont la projection sur d est le point S est la perpendiculaire p à d au point S.
En effet, soit P un point de ce lieu, c'est-à-dire tel que $\text{proj}_d(P) = S$. Alors la perpendiculaire à d issue de P coupe d en S. Comme cette perpendiculaire est unique, elle doit être égale à p. D'où P appartient à p. Inversement, soit P un point de p. Cette perpendiculaire intersecte d en S et donc S est la projection de P sur d par définition.

(2) Soit d' la perpendiculaire à d passant par S. Alors le lieu géométrique des points du plan dont la projection sur d appartient à la demi-droite Sd est l'union de d' et du demi-plan π délimité par d' contenant la demi-droite Sd. Nous savons déjà que les points de d' sont envoyés sur S, donc sur Sd. Soit P un point dans π. Alors la perpendiculaire p à d issue de P est parallèle à d'. Donc cette perpendiculaire est entièrement contenue dans le demi-plan π. Comme $\text{proj}_d(P)$ appartient à cette droite, il est aussi dans π. Et comme $\text{proj}_d(P)$ est aussi sur d, alors $\text{proj}_d(P)$ est sur la demi-droite Sd.
Inversement, soit P un point de ce lieu géométrique. Sa projection Q sur d appartient donc à la demi-droite Sd. La perpendiculaire p à d passant par P est parallèle à d' (voir proposition du cours). Donc soit elle coïncide avec d', soit elle est contenue dans un des demi-plans définis par d'. Comme Q est sur Sd et sur p, la droite p est soit d', soit dans π. Comme le point P est dans p, il doit être aussi soit dans d' (dans ce cas $Q = S$), soit dans π.

Exercice 2

Il faut tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{C}$. Le point P est alors l'intersection de cette bissectrice avec le segment $[AB]$. En effet la bissectrice est le lieu des points équidistants des demi-droites supportant les côtés $[CA]$ et $[CB]$. Nous le démontrons plus loin dans cette série.

Exercice 3

Nautile cloisonné. Le centre n'est jamais atteint ! Nous démontrons ceci par l'absurde. C'est-à-dire, nous supposons que le centre du cercle est atteint en un nombre fini d'étapes et nous en déduisons une contradiction. Lorsqu'on trouve une contradiction, notre hypothèse de départ doit être fausse. D'où nous aurons prouvé que le centre ne peut pas être atteint en un nombre fini d'étapes.
Supposons donc qu'un des points n est le centre du cercle. Notons $[OY]$ le segment contenant n et $[OX]$ le segment contant le point $n-1$ construit à l'étape précédente (X et Y sont des points consécutifs parmi A, B, C,. . ., T). Le segment perpendiculaire à $[OY]$ utilisé pour construire n passe par n et $n-1$. Mais comme n est le centre, ce segment doit être contenu dans le rayon $[OX]$. Ceci implique que OX est perpendiculaire à OY. Or, on sait que l'angle entre OX et OY n'est pas de 90 degrés, mais de $\frac{360}{20} = 18$ degrés. D'où une contradiction. Donc le centre du cercle n'est pas atteint en un nombre fini d'étapes.
Remarquons que la seule chose que nous avons utilisé dans la démonstration est le fait que 360 divisé par le nombre de parties dont le cercle a été divisé n'est pas 90 (l'angle est 90 si et seulement si le

cercle est divisé en 4 parties). Donc nous obtenons le même phénomène si on divise le cercle en un nombre quelconques de parties supérieur à 4 (si le nombre de parties est plus petit que 4 il n'est pas possible de construire le Nautile).

Exercice 4

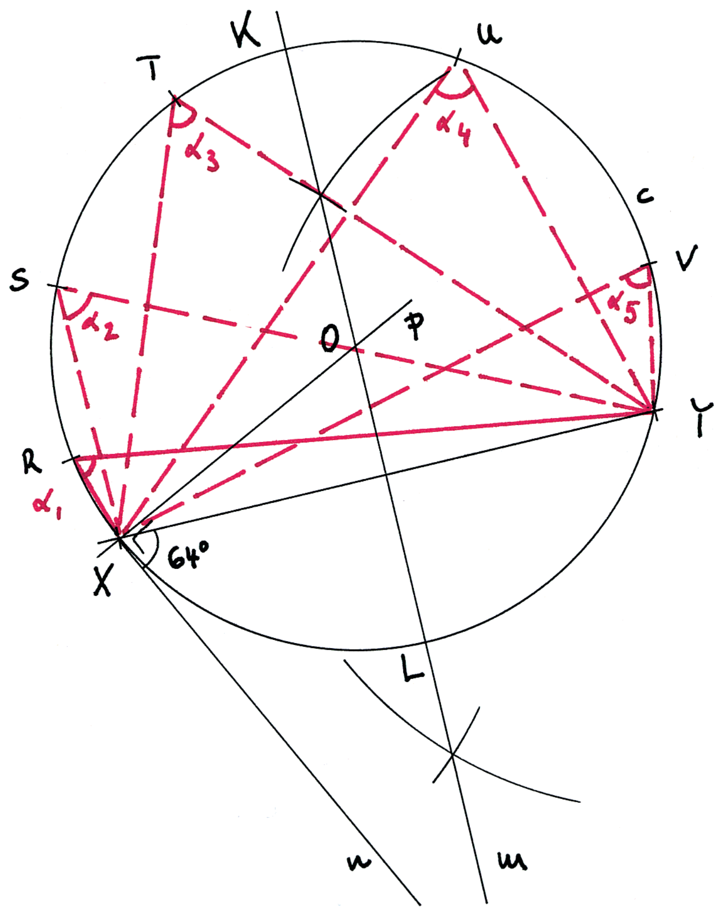
L'arc capable.

Corrigé

79.

Les angles α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 mesurent tous 64° ou 116°, suivant comment sont placées les lettres R, S, T, U et V.

Ce sont des angles inscrits qui ont tous le même angle au centre $\widehat{XOY}$ = 128°.



Exercice 5

Marche à suivre.
(1) On choisit sur les demi-droites de l'angle donné Sab un point $A \in Sa$ et un point B sur Sb.
(2) On reporte la distance $\overline{SA}$ sur la demi-droite Tc donnée. Cette construction est garantie par l'axiome de report et (D7) ; le point ainsi construit est unique. Appelons le C.
(3) On trace le cercle de rayon $\overline{SB}$ centré en T et le cercle de rayon $\overline{AB}$ centré en C.
(4) Ces cercles se coupent en exactement deux points D et D' par (D6). Les demi-droites $[TD$ et $[TD'$ déterminent avec Tc deux angles rectilignes isométriques à l'angle Sab.

Exercice 6

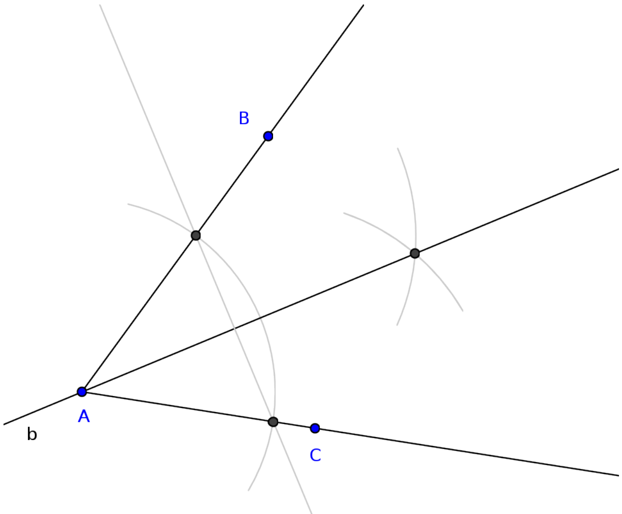
Non	Non	Pas de côté commun !
Oui, le sommet C	Oui, le côté $[CA$	Non
Oui, le sommet A	Oui, le côté $[AB$	Oui
Oui, le sommet A	Non	Pas de côté commun !
Non	Non	Pas de côté commun !
Oui, le sommet A	Oui, le côté $[AC$	Oui

Exercice 7

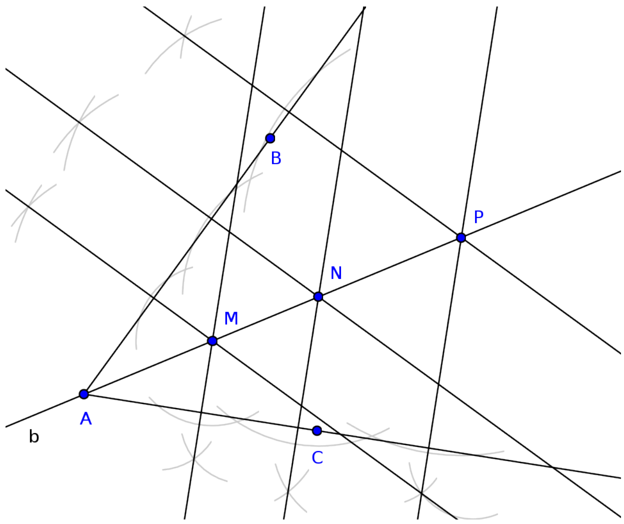
(1) La femme a raison dans le sens que sur le dessin la route $[MB]$ est préférable à la route $[MA]$. Mais personne n'a raison dans le sens que ni $[MA]$ ni $[MB]$ est le chemin le plus court, parce que le chemin le plus court est $[MP]$, où P dénote la projection de M sur la droite AB.

(2) Pour que la ruche soit à égale distance des points A et B, il faut qu'elle soit sur la médiatrice du segment $[AB]$.
Il faut donc placer la ruche sur le point de cette médiatrice le plus proche de M. Ce point est la projection de M sur la médiatrice du segment $[AB]$. Il n'y a pas d'autre endroit qui donne satisfaction à l'apiculteur.
(3)

a) On construit la bissectrice b avec la méthode donnée au cours :



b) On choisit trois points M, N et P sur b et construit :



c) $d(M, AB) = d(M, AC)$, $d(N, AB) = d(N, AC)$ et $d(P, AB) = d(P, AC)$.

d) Tous les points de la bissectrice d'un angle sont équidistants des demi-droites qui définissent cet angle.

Exercice 8

1. Soit P un point de la bissectrice s de l'angle Sab. On construit la projection A de P sur a et B, celle de P sur b. La distance de P à A est la distance $\overline{PA}$ et il s'agit donc de montrer que $\overline{PA} = \overline{PB}$. Comme la symétrie axiale d'axe s préserve les distances, il suffit de montrer que cette symétrie transforme A en B. On sait que l'image de A est un point de Sb car s est l'axe de symétrie de l'angle Sab. D'autre part, les isométries préservent la perpendicularité (voir mini-série 12 !). Ainsi la droite PA qui est perpendiculaire est transformée en une droite passant par P et perpendiculaire à b. C'est PB par définition de la projection orthogonale, si bien que $S_s(A) = B$.

2. Soit A, B deux points distincts du plan π. On veut montrer que $[AB]$ contient une infinité de points. Par l'absurde, supposons que $[AB]$ n'admet qu'un nombre fini de points (sans perte de généralité tous différents) $m_1, \ldots, m_n \in \pi$, avec $n \in \mathbb{N}$. Notons M le point de l'ensemble $\{m_1, \ldots, m_n\}$ le plus proche de A. Alors par le théorème sur la médiatrice du segment, appliqué à $[AM]$, il existe une unique réflexion transformant A en M. De plus, l'axe de cette réflexion coupe le segment en un point, qu'on note O, milieu de $[AM]$. En particulier, O appartient au segment $[AB]$ et n'appartient pas à l'ensemble $\{m_1, \ldots, m_n\}$, ce qui est une contradiction. Donc $[AB]$ contient une infinité de points.

3. Soit a, b deux droites perpendiculaires entre elles. Par définition, elles sont distinctes. Il reste donc à montrer qu'elles ont un point en commun. Par l'axiome du demi-plan, la droite a détermine deux demi-plans notés π_1 et π_2. Comme a et b sont deux droites distinctes, il existe un point A qui appartient à b mais pas à a. Sans perte de généralité, supposons que $A \in \pi_1$. L'image de A par la symétrie d'axe a, qu'on note B, appartient à π_2 (conséquence de l'axiome de symétrie). Par l'axiome du demi-plan, comme $A \in \pi_1$ et $B \in \pi_2$, alors $[AB]$ coupe a. De plus, comme a est perpendiculaire à b, a est un axe de symétrie de b et donc $B \in b$. Ainsi, $AB = b$ et donc a et b se coupent.

Exercice 9

a) Une symétrie centrale dont le centre est A ou une symétrie axiale dont l'axe de symétrie est la droite passant par A perpendiculaire à la bissectrice de $\widehat{A}_1$.

b) Les angles rectilignes $\widehat{A}_1$ et $\widehat{A}_2$ sont isométriques.

c) $\widehat{A}_1$ est appliqué sur $\widehat{A}_2$ par une des isométries du point 1).

d) Non, les angles $\widehat{C}_1$ et $\widehat{C}_2$ ne jouissent pas de la même propriété, car le point C n'est pas l'intersection de deux droites.

Exercice 10

Composition de symétries.

1. L'image de O est O parce que S_a et S_b fixent toutes deux ce point, la première parce que $O \in a$, la seconde parce $O \in b$. On a donc $f(O) = S_b(S_a(O)) = S_b(O) = O$.

   Par contre, si P est différent de O, appelons $P' = S_a(P)$ et $P'' = S_b(P') = f(P)$. Menons les perpendiculaires à a et b passant par P'. Alors P appartient à la première et P'' à la seconde, par construction d'une symétrie axiale. Or ces deux perpendiculaires sont distinctes, si bien que P et P'' sont des points différents.

2. L'image de la droite a par S_a est a elle-même et S_b transforme a en elle-même car b est un axe de symétrie de a. Ainsi $f(a) = a$ (mais f transforme un point de a en un point différent en général comme nous venons de le voir). De même $f(b) = b$.

3. L'image P' d'un point P par S_a forme une croix de droites OP et OP' dont a est un axe de symétrie (a est la bissectrice de l'angle $\widehat{POP'}$). Maintenant observons que S_b transforme P' en un point P'' équidistant de b si bien que b est la bissectrice *extérieure* de l'angle $\widehat{POP'}$, c'est-à-dire la bissectrice de l'angle adjacent supplémentaire. En effet la symétrie dont l'axe est cette bissectrice transforme la droite OP en OP' et OP' en OP. Elle transforme donc la bissectrice de l'angle $\widehat{POP'}$ en elle-même car elle préserve les distances. Par conséquent elle est est un axe de symétrie de cette bissectrice. C'est b.

   Ainsi l'image de P par f est un point P'' se trouvant sur OP, mais de l'autre côté de O.
4. L'image de P se trouve donc sur OP à la même distance de O que P car f est une isométrie.
5. L'image de la droite m est une droite parallèle à OP. En effet si deux droites ne se coupent pas, leurs images par une isométrie ne peuvent se couper (injectivité). Le point Q a pour image par f un point ne se trouvant pas sur m puisque son image se trouve sur OQ, mais de l'autre côté de O. Si ce point était sur m les droites m et OQ seraient confondues. Par conséquent l'image par f de m est une droite parallèle à m.

Exercice 11

a) Elle lui conseille de traverser perpendiculairement à la route, car c'est le trajet qui minimise le temps passé sur la route.

b) On trace 2 droites d_1 et d_2 : la première parallèle à la route Liège-Charleroi et située à 2 cm de cette route, l'autre aussi mais de l'autre côté de la route.

   On trace encore 2 droites d_3 et d_4 : la première parallèle à la route Gembloux-Ciney et située à 1 cm de cette route, l'autre aussi mais de l'autre côté de la route.

   Xavier habite à l'un des points suivants :

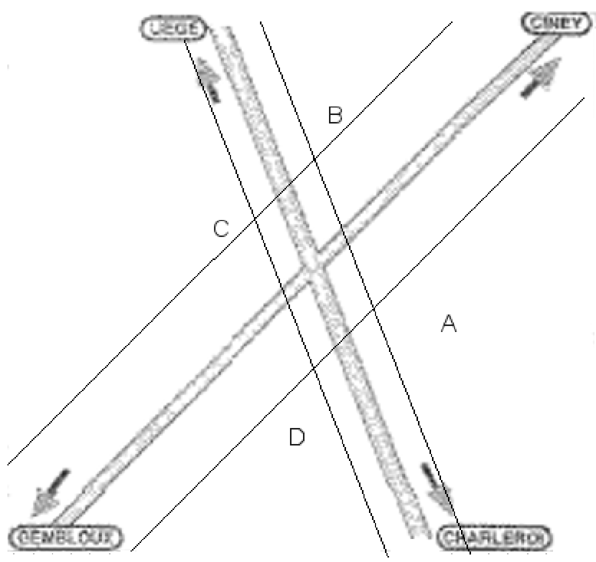
   (a) l'intersection de d_1 et d_4

   (b) l'intersection de d_2 et d_4

   (c) l'intersection de d_1 et d_3

   (d) l'intersection de d_2 et d_4

   Les points où Xavier peut habiter sont les points indiqués sur le dessin suivant par A, B, C et D :



Exercice 12

La construction de la parallèle proposée au cours nous dit que h est perpendiculaire à BC.

Exercice 13

Géométrie Constructions

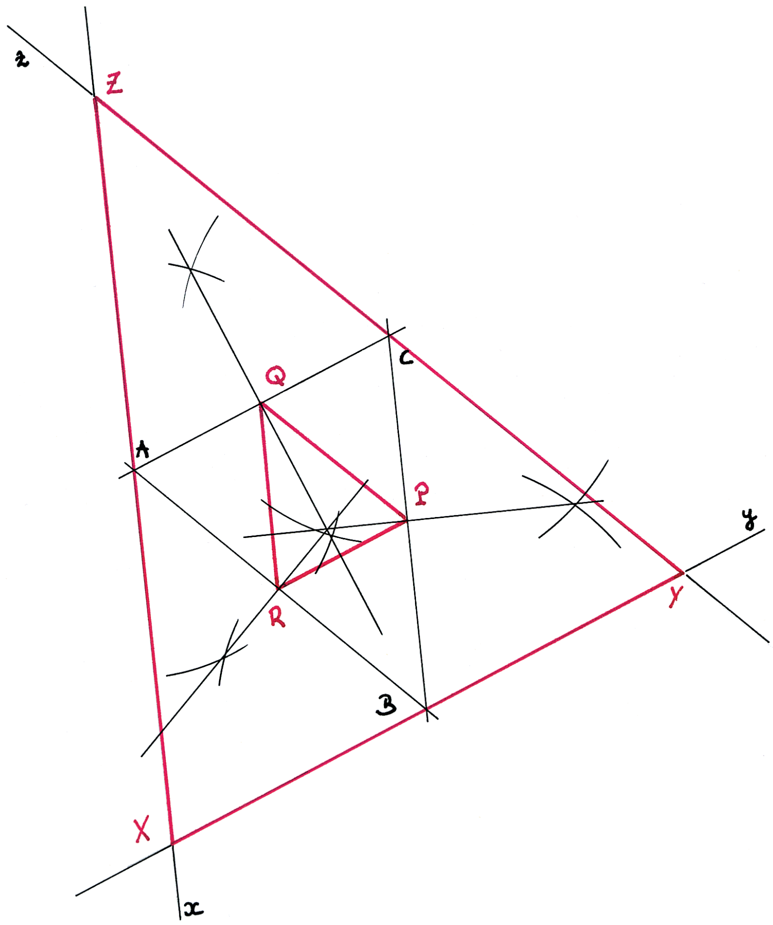
Corrigé

52.

Le triangle *PQR* a une aire 4 fois plus petite que celle du triangle *ABC*.

Le triangle *XYZ* a une aire 4 fois plus grande que le triangle *ABC*.

Les dimensions du triangle *XYZ* sont 4 fois plus grandes que celles du triangle *PQR*.
Son aire est donc 16 fois plus grande que celle de ce même triangle *PQR*.



Mathématiques 7-8-9

Exercice 14

1. L'image d'un point sur a est sur a', et l'image d'un point sur b est sur b'. Donc l'image d'un point en même temps sur a et sur b est en même temps sur a' et sur b'.
2. O fait partie du segment $[AB]$. Donc O' fait partie du segment $[A'B']$ par préservation des segments par les isométries. Il suffit donc de montrer que $d(O', A') = d(O', B')$:

$$\begin{aligned} &d(O, A) = d(O, B) && \text{car } O \text{ est le milieu de } [AB] \\ &d(O, A) = d(f(O), f(A)) = d(O', A') \\ &d(O, B) = d(f(O), f(B)) = d(O', B') \end{aligned}$$

   Donc on conclut que $d(O', A') = d(O', B')$.
3. O et M sont distincts par hypothèse et on a vu que les isométries transforment des points distincts en des points distincts.
4. b est perpendiculaire à a et donc est un axe de symétrie de a. La symétrie b transforme A en un point de a de l'autre côté de b à même distance de O. Mais il n'y a qu'un seul point sur cette demi-droite Oa qui vérifie cette condition (axiome du report d'une distance sur une demi-droite). C'est donc le point B. Donc b est la médiatrice de $[AB]$ par le théorème de la médiatrice. Donc $d(A, M) = d(B, M)$. Comme f est une isométrie nous avons aussi que

$$d(A', M') = d(f(A), f(M)) = d(A, M) = d(B, M) = d(f(B), f(M)) = d(B', M').$$

5. O' et M' par cette propriété se trouvent sur la médiatrice de $[A'B']$ (car la médiatrice de $[A'B']$ est le lieu géométrique des points équidistants à A' et B'). Mais il ne passe qu'une droite par deux points (axiomes de connexion). Cette médiatrice est donc confondue avec b'.
6. On sait que la médiatrice d'un segment $[AB]$ est perpendiculaire à la droite AB. On a démontré que b' est la médiatrice de $[A'B']$, donc b' est perpendiculaire à $[A'B']'$.
   On a donc montré que les isométries préservent la perpendicularité !

Exercice 15

Un casse-tête pour le plaisir. On observe que lorsque deux iguanes de couleurs différentes se rencontrent, le nombre d'iguanes de ces couleurs diminue d'un, alors que le nombre d'iguanes de la troisième couleur augmente de deux. Ainsi, la *différence* du nombre d'individus de deux populations de deux couleurs différentes reste égale, ou sinon augmente ou diminue de trois.
Par exemple, dans le cas où un iguane rouge rencontre un iguane jaune, il reste 14 iguanes rouges et 16 iguanes jaunes, si bien que la différence reste égale à deux (16-14 = 17-15), mais il y a à présent 15 iguanes jaunes et par conséquent la différence "iguanes rouges - iguanes verts" est passé de 2 à -1, elle a diminué de 3 pendant que la différence "iguanes verts - iguanes jaunes" est passé de -4 à -1, elle a augmenté de 3.
Autrement dit la différence de deux populations d'iguanes soit reste égale, soit reste égale "modulo 3". Or, on demande s'il est possible que deux populations d'iguanes disparaissent, auquel cas la différence de leurs populations sera nulle, égale à zéro. Au départ cette différence vaut 2 ou 4. On ne peut atteindre zéro en ajoutant ou soustrayant 3, la réponse est que c'est impossible.