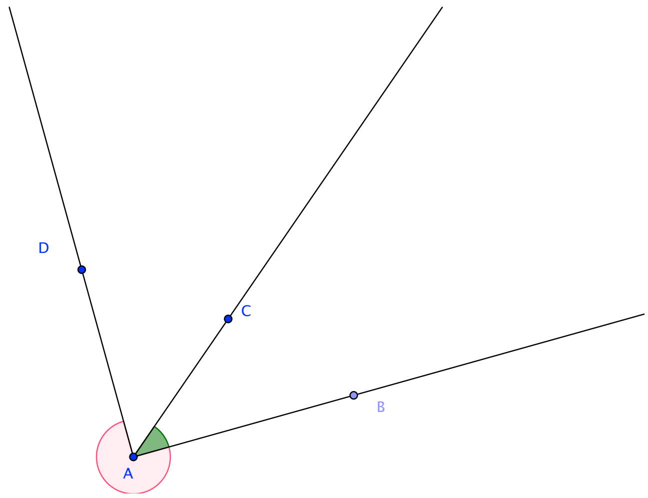
Cours Euler: Corrigé 12

le 23 novembre 2022

Exercice 1

Les angles rectilignes $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$ sont adjacents-complémentaires puisque la demi-droite $[AC$ est commune aux deux angles rectilignes et que l'angle donné par les deux autres demi-droites, à savoir $\widehat{BAD}$, est un angle droit.



Par contre les angles-plans ne sont pas adjacents-complémentaires car l'angle-plan choisi pour $\widehat{CAD}$ est un angle-plan rentrant comme indiqué sur la figure, alors qu'il devrait être saillant.

Exercice 2

Amplitude des angles	**définition ou propriété utilisée**
$\widehat{A}_1 \equiv \widehat{A}_3 \qquad \widehat{A}_2 \equiv \widehat{A}_4$	Angles opposés par le sommet
	Angles supplémentaires

alternes-internes	$\widehat{B}_1$ et $\widehat{A}_3$; $\widehat{B}_2$ et $\widehat{A}_4$	$\widehat{B}_1$ et $\widehat{A}_3$; $\widehat{B}_4$ et $\widehat{A}_2$
alternes-externes	$\widehat{B}_3$ et $\widehat{A}_1$; $\widehat{B}_4$ et $\widehat{A}_2$	$\widehat{B}_3$ et $\widehat{A}_1$; $\widehat{B}_2$ et $\widehat{A}_4$
correspondants	$\widehat{B}_1$ et $\widehat{A}_1$; $\widehat{B}_2$ et $\widehat{A}_2$; $\widehat{B}_3$ et $\widehat{A}_3$; $\widehat{B}_4$ et $\widehat{A}_4$	$\widehat{B}_1$ et $\widehat{A}_1$; $\widehat{B}_2$ et $\widehat{A}_2$; $\widehat{B}_3$ et $\widehat{A}_3$; $\widehat{B}_4$ et $\widehat{A}_4$

Exercice 3

1. On peut prendre D le symétrique de A par le milieu du segment $[CB]$, D' le symétrique de B par le milieu du segment $[AC]$ et D'' le symétrique de C par le milieu du segment $[AB]$.

2. On peut tracer le symétrique du segment $[AB]$ par P. P est alors le centre de symétrie de la nouvelle figure. On peut aussi construire le symétrique du point P par le centre de symétrie M où M est le milieu de $[AB]$. M est alors le centre de symétrie.

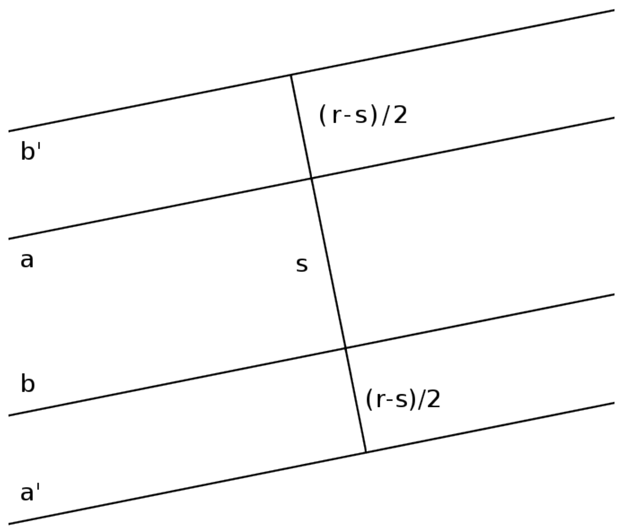
3. Soit d une droite et O un point sur d. Montrons que O est un centre de symétrie de d, c'est-à-dire que la symétrie S_O transforme d en d.
   D'abord, montrons que $S_O(d) \subset d$: Soit $P \in d$. Si $P = O$, alors $S_O(P) = O$. Donc $S_O(P) \in d$. Si $P \neq O$, alors $S_O(P)$ appartient à la droite OP. Or, $OP = d$.
   Puis, montrons que $S_O(d) \supset d$: Soit $P \in d$. Notons que $S_O(P) \in d$ par le point précédent. Posons $Q = S_O(P)$, on a $P = S_O(S_O(P)) = S_O(Q)$. Donc $P \in S_O(d)$.

Exercice 4

Dans le cas où a et b sont à distance plus grande que r, alors il n'y a aucun point dont la somme des distances à a et b égale r.

Dans le cas où a et b sont à distance égale à r, alors le lieu géométrique des points dont la somme des distances à a et b égale r est le lieu géométrique des points entre a et b (a et b comprises).

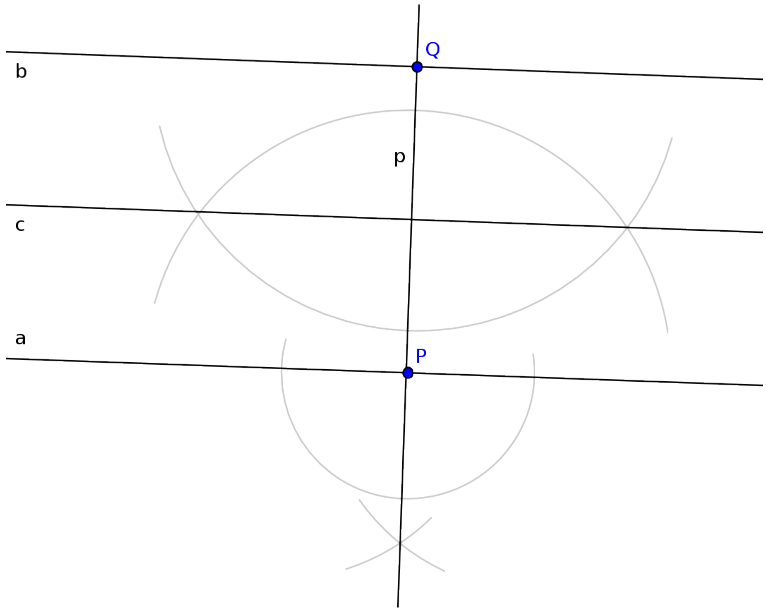
Traitons le cas où a et b sont à une distance s inférieure à r. Les points auxquels nous sommes intéréssés ne sont forcement pas entre a et b par le cas d'avant. Soit P un point qui n'est pas entre a et b et ni sur a ni sur b, mais du même côté que b par rapport à a. Notons t sa distance à b. Alors sa distance à a est $t + s$. Donc sa somme des distances à a et b est $2t + s$. Si la somme des distances à a et b de P égale r, alors $2 \cdot t + s = r$. Donc $t = \frac{r-s}{2}$.
Ainsi le lieu géométrique des points dont la somme des distance à a à b égale r consiste en deux droites a' et b' :
- pas entre a et b,
- a' parallèle à a du même côté de b à distance $\frac{r-s}{2}$ de b,
- b' parallèle à b du même côté de a à distance $\frac{r-s}{2}$ de a.



Exercice 5

La droite c est à équidistance des parallèles a et b.
Marche à suivre :
1) Construire une perpendiculaire p à a. Elle coupe a en P et b en Q respectivement.
2) Construire la médiatrice du segment $[PQ]$. C'est la droite cherchée.

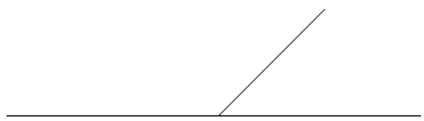
Justification. Montrons que c est une parallèle équidistante de a et b. Soit M le milieu du segment $[PQ]$. Notons d'abord par la méthode 1 de la construction d'une parallèle passant par un point que



c est parallèle à a, comme la médiatrice du segment $[PQ]$ est perpendiculaire à p. Par définition, la distance de a et c est la distance de M à a. Cette distance égale $\overline{MP}$ comme P est l'intersection de la perpendiculaire p et a. Par un corollaire du cours, la droite p et aussi perpendiculaire à la parallèle b de a. Comme précédemment, on déduit que c est parallèle à b et que la distance de b et c égale $\overline{MQ}$. Or, $\overline{MQ} = \overline{MP}$ car M est le milieu du segment $[PQ]$.

Exercice 6

1. Comme l'un des deux doit mesurer trois fois l'autre et la somme doit mesurer 180, un doit mesurer $\frac{1}{4} \cdot 180 = 45$ degrés et l'autre $\frac{3}{4} \cdot 180 = 135$ degrés.



2. Pour construire un tel angle, il suffit de construire un angle droit, de le diviser en huit parties isométriques grâce à des bissectrices et de prendre trois angles adjacentes.

Exercice 7

a) angles supplémentaires
b) angles supplémentaires
c) angles complémentaires
d) angles adjacents-supplémentaires
e) angles supplémentaires
f) angles adjacents-complémentaires

Exercice 8

Nous utilisons la proposition qui introduit la mesure m d'un angle plan. Soient β_1 et β_2 supplémentaires à un angle α. Par la partie (3) de la proposition, on a

$$m(\beta_1) = 180^\circ - m(\alpha) = m(\beta_2).$$

Donc, β_1 et β_2 sont isométrique par la partie (2) de la proposition.

Exercice 9

$\widehat{ACB} = 60°$ car c'est un angle supplémentaire à $\widehat{C}$.
$\widehat{BMC} = 60°$ car il est opposé à $\widehat{AMD}$ par le sommet.
$\widehat{AMB} = 120°$ car il est supplémentaire à $\widehat{AMD}$.

Exercice 10

On peut procéder par tâtonnement, mais la méthode la plus efficace consiste à poser une équation. La mesure du supplément de α vaut $180° - \alpha$. La mesure du complément de α vaut $90° - \alpha$. L'énoncé s'écrit donc :

$$180° - \alpha = 4 \cdot (90° - \alpha)$$

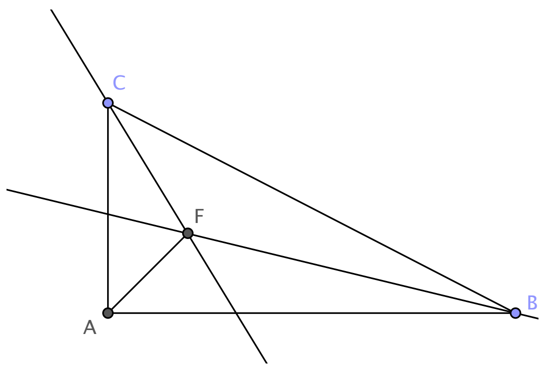
Pour résoudre cette équation, on passe par les étapes suivantes :

$$\begin{aligned} 180° - \alpha &= 4 \cdot (90° - \alpha) \\ 180° - \alpha &= 360° - 4 \cdot \alpha \\ 180° + 3 \cdot \alpha &= 360° \\ 3 \cdot \alpha &= 180° \\ \alpha &= 60° \end{aligned}$$

Dans la première étape, on a distribué le produit sur la parenthèse. Ensuite, à chaque étape, on a effectué les mêmes opérations à gauche et à droite de l'égalité de sorte que l'égalité est préservée.

Exercice 11

Voici le "croquis" :



L'angle en A est droit, il vaut 90°, celui en B est égal à 30°. Par conséquent l'angle en C vaut 60° puisque la somme des angles vaut 180°. Les bissectrices se coupent en un point F si bien que celle issue de A partage l'angle en deux angles égaix de 45° et celle issue de C partage l'angle de 60° en deux angles de 30°. On conclut alors que l'angle en F du triangle AFC vaut $180° - 45° - 30° = 105°$.

Exercice 12

La somme des angles d'un triangle est de 180°. Un angle obtus a une mesure d'au moins 90°. Si le triangle a deux angles obtus, dans le meilleur des cas ces deux angles sont de 90°. Comme le troisième angle n'a pas mesure nulle la somme serait supérieure à180°. Donc un triangle a forcément au plus un angle obtus.

Exercice 13

Corrigé

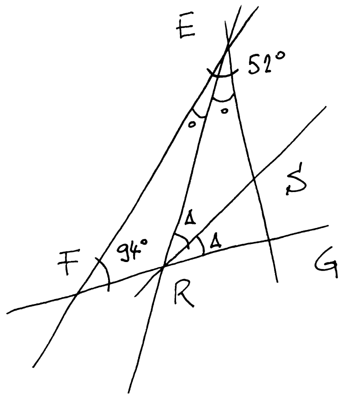
207.

$\widehat{FGE} = 180 - (94 + 52) = 34°$

$\widehat{ERS} = \left[180 - \left(\frac{52}{2} + 34\right)\right] \cdot \frac{1}{2} = 60°$

$\widehat{ESR} = 180 - \left(\frac{52}{2} + 60\right) = 94°$

$\widehat{RSG} = 180 - 94 = 86°$



Justifications.
calcul de $\widehat{FGE}$: Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{FGE} + \widehat{GEF} + \widehat{EFG} = 180$. Ainsi, $\widehat{FGE} = 180° - 52° - 94° = 34°$.
calcul de $\widehat{ERS}$: Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{ERG} + \widehat{RGE} + \widehat{GER} = 180°$. En utilisant que $\widehat{GRS}$ et $\widehat{SRE}$ sont adjacents et de même mesure, on obtient

$$\widehat{ERS} = \frac{1}{2}\widehat{ERG} = \frac{1}{2} \cdot (180° - \widehat{RGE} - \widehat{GER}) = \frac{1}{2} \cdot (180° - \widehat{FGE} - \widehat{GER}) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 34° - \frac{52°}{2}) = 60°$$

calcul de $\widehat{ESR}$: Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{ESR} + \widehat{ERS} + \widehat{RES} = 180°$. En utilisant que $\widehat{RES}$ et $\widehat{FER}$ sont adjacents et de même mesure, on obtient $\widehat{ESR} = 180° - 60° - \frac{1}{2} \cdot 52° = 94°$.
calcul de $\widehat{RSG}$: Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{RSG} + \widehat{SGR} + \widehat{GRS} = 180°$. En utilisant que $\widehat{GRS} = \widehat{SRE} = 60°$, on obtient $\widehat{RSG} = 180° - 34° - 60° = 86°$.

Exercice 14

Puisque l'angle en B mesure 156° et que le triangle est isocèle, les angle en A et en C de ce triangle valent tous deux 12°.
Puisque les points A, B, D sont alignés, nous en déduisons que l'angle $\widehat{CBD}$ est supplémentaire de 156°, il vaut donc 24°. C'est aussi la mesure de l'angle $\widehat{CDB}$ (triangle isocèle). La somme des angles du triangle BCD valant 180°, l'angle en C vaut 132°.
Nous arrivons enfin à en déduire la valeur des angles du triangle CDE. En effet les points A, C, E sont alignés si bien que la somme des angles $\widehat{ACB} + \widehat{BCD} + \widehat{DCE}$ est un angle plat. Par conséquent $\widehat{DCE} = 36°$. C'est aussi la mesure de l'angle $\widehat{CED}$. Ainsi $\widehat{CDE} = 108°$.

Exercice 15

Le premier est impossible à construire car $4+11 < 16$, les mesures des côtés ne satisfont pas l'inégalité triangulaire. La somme des angles du second vaut 190°, ce qui est impossible puisque la somme des angles de tout triangle est égale à 180°. Le troisième donne un "triangle plat" puisque la somme $5 + 4 = 9$, ce n'est pas un triangle. Seul le dernier est possible : $|3 - 5| < 4 < 3 + 5$.

Exercice 16

Par le Théorème qui affirme que la somme des angles d'un triangle vaut 180°, on calcule l'angle en B qui vaut 41°, l'angle en F de 44°, les angles égaux en G et H de 54,5°, les angles de 60° du triangle équilatéral. La seule nouveauté ici est le dernier triangle. L'angle en O vaut $360° - 333° = 27°$ et de même l'angle en N vaut 36°. Ainsi l'angle cherché en M vaut $180° - 27° - 36° = 117°$.

Pour terminer : l'ellipse !

Les élèves doivent trouver les points satisfaisant à la caractéristique « être à la même distance de Vostok (V) et du Cercle Polaire Antarctique (c) ».

Pour jouir de cette particularité, un point A (fig. 1) doit être à l'intersection de la médiatrice m du segment VC et du rayon OC, O désignant le pôle Sud.

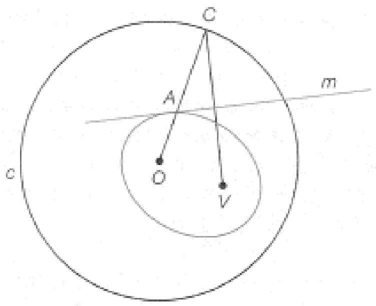


Figure 1

La recherche d'un nombre suffisant de ces points amène au constat selon lequel l'explorateur se situe sur une courbe fermée.

Remarque

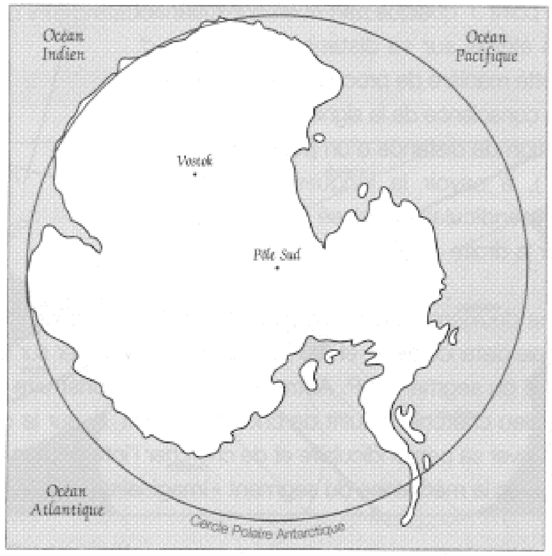
Sur une carte terrestre, la longueur des segments projetés n'est jamais proportionnelle à celle des arcs de cercle correspondants. Ce problème n'a donc de sens que si l'on ne tient pas compte de la courbure de la terre.

Prolongements

Sous la conduite du maître, les élèves cherchent à caractériser cette courbe – c'est une ellipse –, selon l'un des deux scénarios suivants :

Son dernier message radio précise qu'il se trouve à égale distance de Vostok et du Cercle Polaire Antarctique.

Où peut-il bien être ?



- choisir un point de la courbe ;
- mesurer les distances de ce point au pôle Sud et à Vostok ;
- effectuer la somme de ces distances ;
- répéter cette procédure plusieurs fois, afin de constater que les sommes obtenues sont proches ou égales ;
- considérer un point A de la courbe ;
- établir que $AV = AC$ (par construction) ;
- en déduire que :
  $AV + AO = AC + AO = r$
  (r étant le rayon du Cercle Polaire Antarctique).

On est donc bien en présence du lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante, soit par définition : une ellipse. En outre, ce lieu géométrique est aussi celui des centres des cercles tangents intérieurement au Cercle Polaire Antarctique et passant par Vostok.