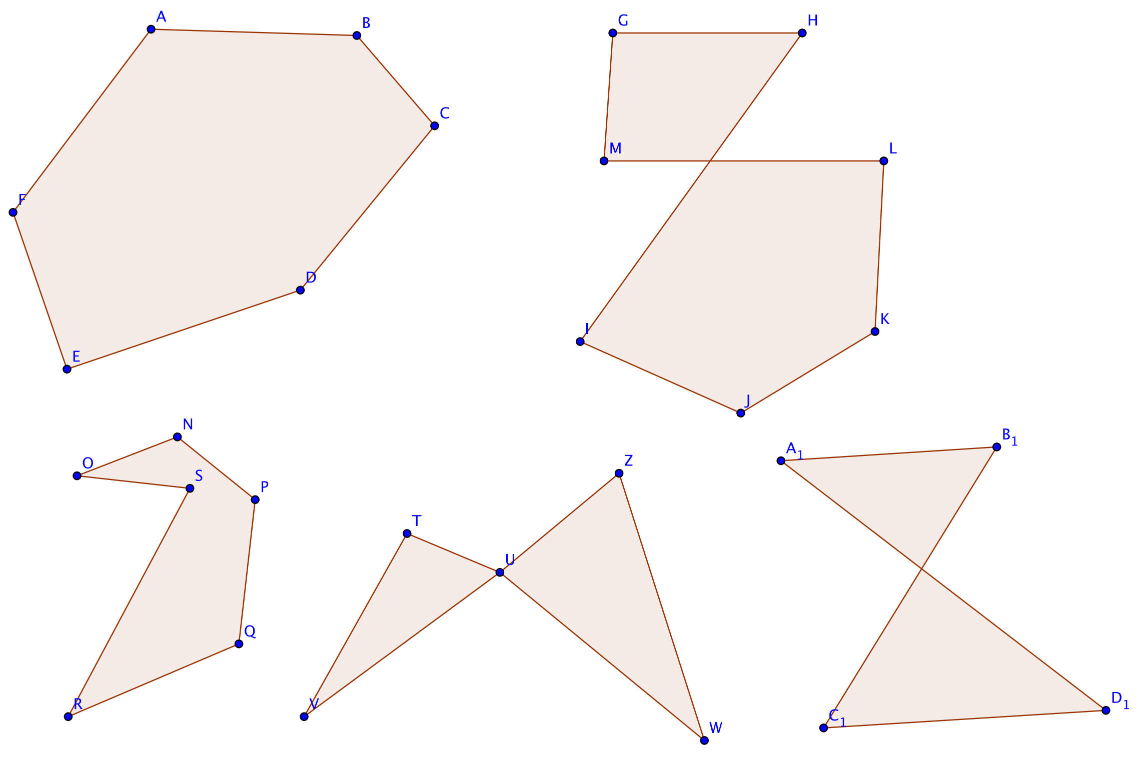
Cours Euler: Série 13

le 30 novembre 2022

Exercice 1

Pour les polygones suivants,

1. Donne le nombre de sommets.
2. Indique s'il est simple ou non. Sinon, explique quelle condition n'est pas respectée.
3. Indique s'il est convexe ou non.
4. Mesure les angles du quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ et calcule leur somme. Rappelle ce que vaut la somme des angles d'un quadrilatère *simple*. Explique pourquoi, pour un quadrilatère ayant deux côtés qui se coupent, la somme des angles sera toujours *inférieure* à cette valeur.



Exercice 2

Dans l'exercice suivant, lorsqu'il est indiqué « Théorème », cela signifie que tu dois donner une démonstration. Utilise les axiomes pour cela.

18. **Calcul.** On considère un polygone convexe à n côtés. Calculer le nombre de ses diagonales. Prendre d'abord n = 3, 4, 5 et 6. Puis passer au cas général.

19. **Théorèmes.**
    1. Tout demi-plan est une figure convexe.
    2. Toute droite est une figure convexe.
    3. Toute demi-droite est une figure convexe.
    4. Tout segment est une figure convexe.

20. **Théorème.** L'intersection de deux figures convexes est une figure convexe.

21. **Problème.** On donne un triangle **ABC**. Dans quelle région du plan faut-il prendre un quatrième point **P** de façon que le quadrilatère **ABCP** soit convexe ?

22. **Problème.** Dessiner un pentagone convexe quelconque **ABCDE**. Trouver la région du plan où l'on peut prendre un sixième point **P** tel que les six points constituent ensemble les sommets d'un hexagone convexe.

Exercice 3

ES14 Angles en tous genres

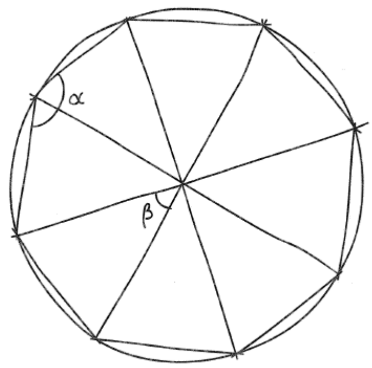
a) Quel est le nom du polygone régulier représenté par ce croquis ?

b) Quelle est la mesure de l'angle α et quel est son type ?

c) Quelle est la mesure de l'angle β et quel est son type ?

d) Quelle est la mesure des angles α et β d'un dodécagone régulier ?

e) Et d'un polygone régulier à n côtés ?



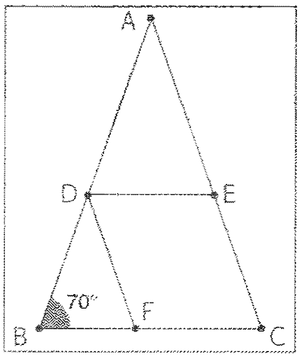
Exercice 4

Sur la donnée ou sur feuille à part.

254 ABC est un triangle isocèle de sommet A.

$\hat{B} = 70°$; DE // BC et DF // AC.

Détermine l'amplitude des angles suivants et justifie ta réponse par une propriété.



1. $\widehat{ACB}$ = ...

car ....

2. $\widehat{AED}$ = ...

car ....

3. $\widehat{DFB}$ = ...

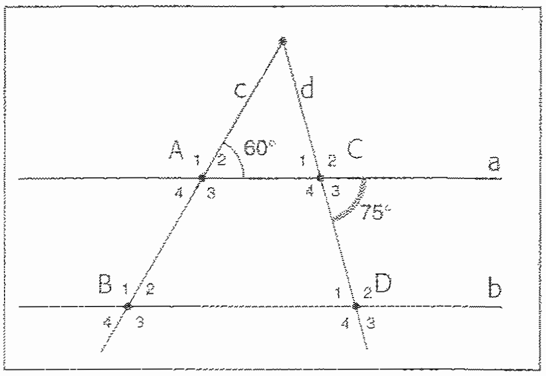
car ....

4. $\widehat{EDF}$ = ...

car ....

255 a et b sont deux droites parallèles coupées par deux sécantes c et d.

Donne l'amplitude des angles suivants et justifie chaque fois par une propriété.



- $\widehat{B}_4$ = ...

Justification :

....

- $\widehat{D}_1$ = ...

Justification :

....

- $\widehat{C}_1$ = ...

Justification :

....

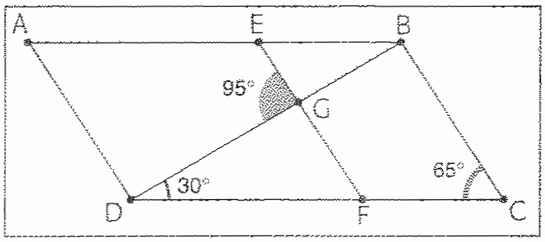
- $\widehat{D}_4$ = ...

Justification :

....

256 ABCD est un parallélogramme, EF // BC.

Détermine l'amplitude des angles ci-dessous et justifie ta réponse par une propriété.



$\widehat{EFD}$ = ..., car ....

$\widehat{ABD}$ = ..., car ....

$\widehat{FGB}$ = ..., car ....

$\widehat{DGF}$ = ..., car ....

257 **Vrai** ou **faux** ? Si tu dis « vrai », justifie. Si tu dis « non », donne un contre-exemple et corrige l'énoncé.

1. Deux angles alternes-internes ont toujours même amplitude.

....

....

2. Les angles formés par deux droites a et b parallèles coupées par une sécante s, situés d'un même côté de s et à l'intérieur de a et de b sont supplémentaires.

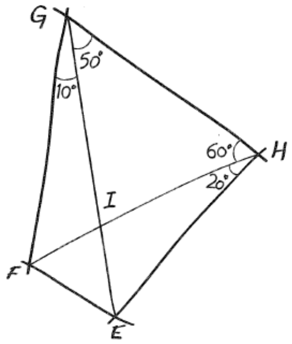
Exercice 5

ES35 Isocèle et équilatéral

Dans le croquis ci-contre, on indique la mesure de certains angles.

Quelles sont les mesures des angles du triangle *EFI* ?

Justifie tes résultats.



Exercice 6

On se donne une demi-droite Sd. Construis sur cette demi-droite, à la règle et au compas, des angles de 90°, 45°, 60°, 30°, 105°, 75°. Donne une marche à suivre. Nous savons construire une perpendiculaire et une bissectrice, il n'est donc pas nécessaire de détailler la construction des ces droites.

Exercice 7

Démontre par une construction (un exemple explicite) que la composition d'isométries n'est pas commutative en général.

Exercice 8

Définition : L'*enveloppe convexe* d'une figure F est la plus petite figure convexe contenant F, c'est-à-dire, c'est une figure convexe, nommée $Env(F)$, contenant F et telle que si G est une autre figure convexe contenant F, alors $G \supset Env(F)$.

1. Montre que l'enveloppe convexe de F est l'intersection de toutes les figures convexes qui contiennent F.
2. Montre que l'enveloppe convexe d'une figure convexe est la figure elle-même. Quelle est l'enveloppe convexe d'un cercle ?
3. Xavier fait le raisonnement suivant. « J'ai une meilleure définition de l'enveloppe convexe d'une figure F, qui est beaucoup plus facile. Vu qu'on veut une figure convexe qui contienne F, il faut que tous les segments ayant leurs extrémités sur F fasse partie de cette figure. L'ensemble de ces segments (qui contient F) est l'enveloppe convexe cherchée. »

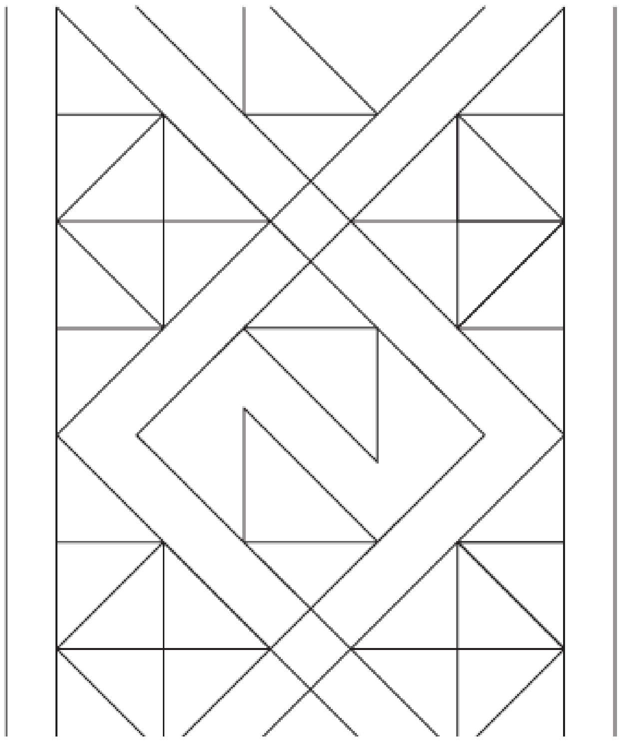
   Donne un exemple d'une figure pour laquelle cette notion diffère de la notion d'enveloppe précédemment définie. Où est la faille du raisonnement de Xavier ? Pourquoi est-ce que sa notion n'est pas correcte ? (Indication : considérer un ensemble fini de points).

Exercice 9

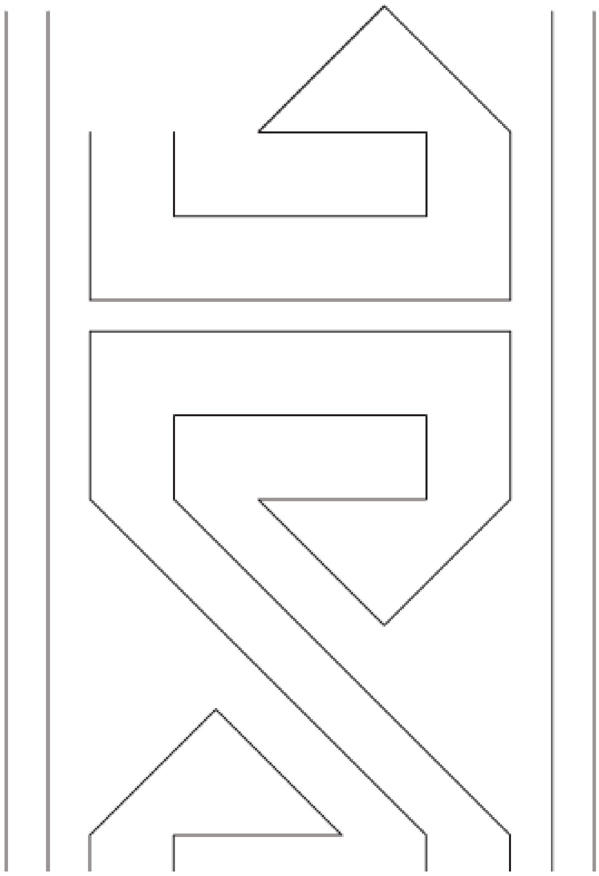
123. Bandes décorées

Prolonge ces deux bandes décorées et décris quelques-unes des isométries en présence.

a)



b)

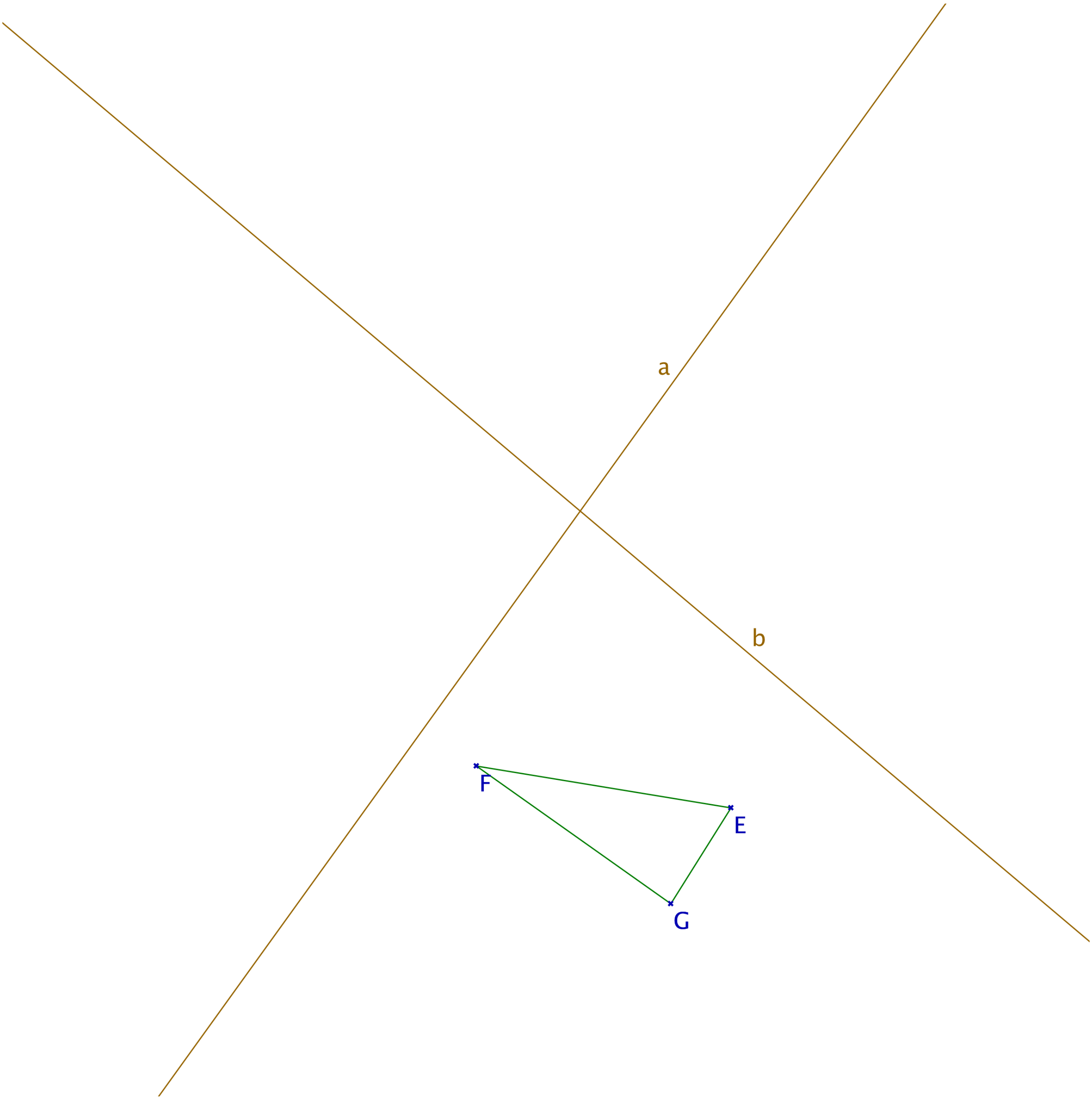


Exercice 10

Démontre que l'inverse d'une isométrie est une isométrie. On travaille donc avec une isométrie du plan $f : \Pi \to \Pi$, dont on sait qu'elle préserve les distances ; i.e. pour toute paire de points $P, Q \in \Pi$, les distances $\overline{PQ}$ et $\overline{f(P)f(Q)}$ sont égales. Il faut montrer que f^{-1} aussi préserve les distances. Rappelons que la définition de l'inverse de f est la suivante. Pour tout point X du plan, il existe un unique point $Y \in \Pi$ tel que $f(Y) = X$. On pose alors $f^{-1}(X) = Y$.

Exercice 11

Construis l'image du triangle EFG sous les réflexions successives S_a et S_b (dans cet ordre). Comment construire directement l'image de EFG sous l'isométrie $S_b \circ S_a$, sans passer par les réflexions successives ? Décris cette isométrie.



Exercice 12

Un challenge de pommes d'Alex Bellos. Tiré de sa rubrique du Guardian et dont la solution est ici : https ://www.theguardian.com/science/2017/nov/20/did-you-solve-it-this-apple-teaser-is-hard-core

Un villain gangster, Al, te kidnappe avec deux de tes amis, Béa et Carl. Il ne vous libérera que si l'un de vous arrivera à résoudre son challenge favori. Il vous enferme chacun dans l'une de trois chambres adjacentes. Dans chaque chambre se trouve un panier de pommes, au moins une, mais au plus neuf, et chaque fois un nombre différent. Tu vois que dans ta chambre il y a cinq pommes et tes amis peuvent aussi compter les pommes dans leur chambre. Pour réussir à trouver le nombre total de pommes, vous avez le droit de poser exactement une question à Al, à laquelle il répondra par oui ou par non, en disant la vérité. Tes amis et toi pourrez écouter les trois questions et les trois réponses.
C'est d'abord le tour de Béa : - Est-ce que le total est un nombre pair ? Al répond non.
C'est le tour de Carl ensuite : - Est-ce que le total est un nombre premier ? Al répond encore non.
Voilà, c'est ton tour maintenant ! Quelle question vas-tu poser pour que l'un de vous puisse trouver le nombre de pommes ?