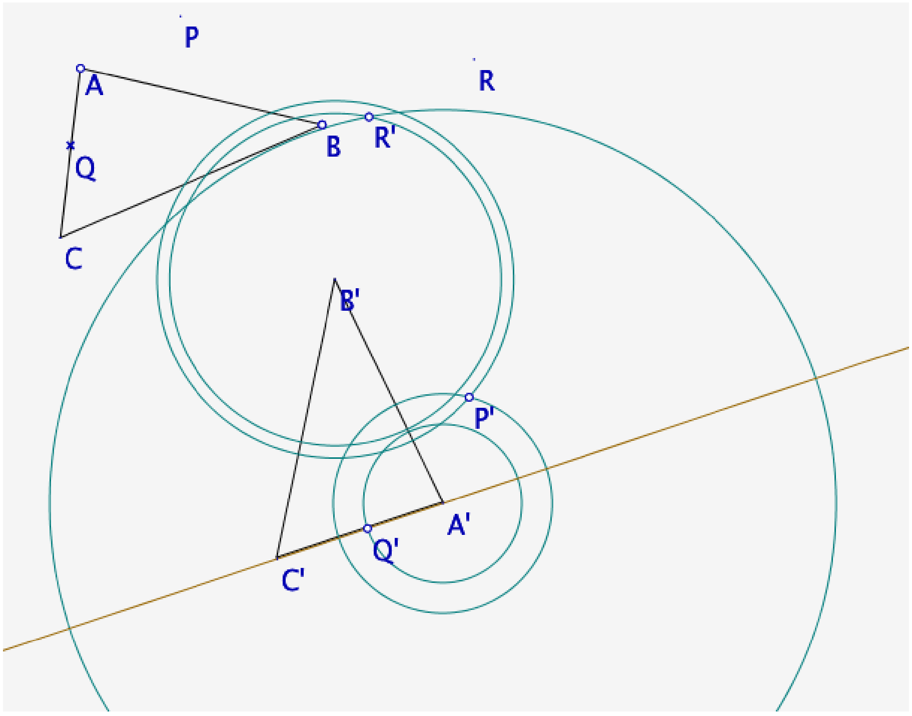
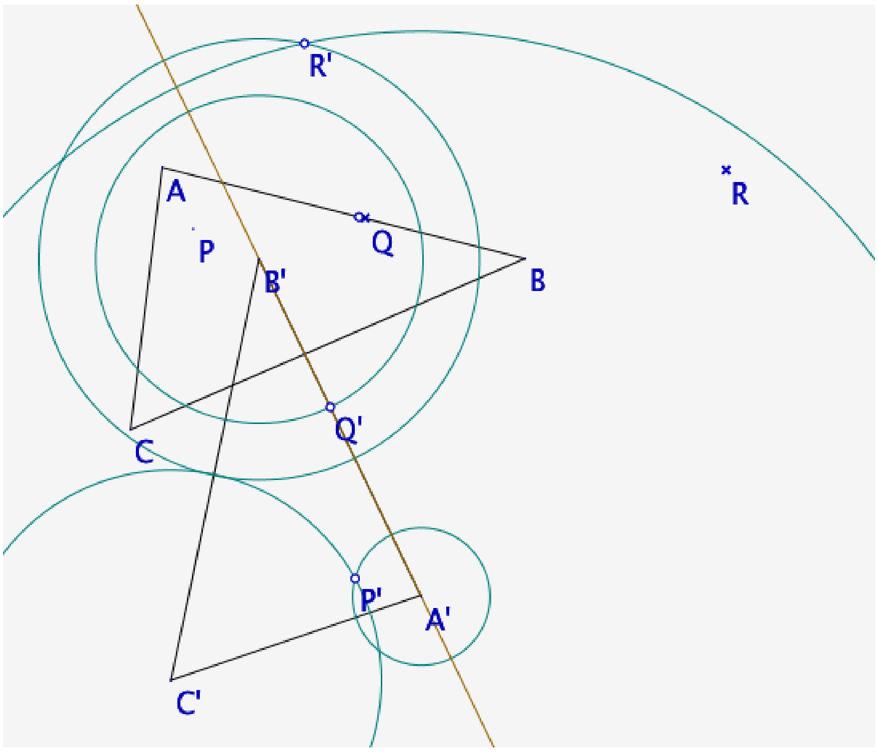
Cours Euler: Corrigé 14

le 7 décembre 2022

Exercice 1





2) On se donne un triangle ABC et son image $A'B'C'$. Soit S un point dont on veut construire l'image S'.

Marche à suivre
1. Choisir un côté du triangle dont le support ne contient pas S, disons $[AB]$.
2. Tracer les cercles $C(A', \overline{AS})$ et $C(B', \overline{BS})$. Ces cercles se coupent en deux points P et Q qui sont de part et d'autre de la droite $A'B'$.
3. Si S se trouve dans le même demi-plan de frontière AB que C, alors l'image de S est le point construit qui se trouve dans le même demi-plan de frontière $A'B'$ que C', si S ne se trouve pas dans le même demi-plan de frontière AB que C, alors l'image de S est le point construit qui ne se trouve pas dans le même demi-plan de frontière $A'B'$ que C'.

Une autre méthode, plus rapide, est possible dans le cas où le point S est sur le support de l'un des côtés du triangle. Si S est l'un des sommets, alors nous connaissons déjà son image. Supposons que S n'est pas un sommet et qu'il appartienne au support d'un côté, disons BC.

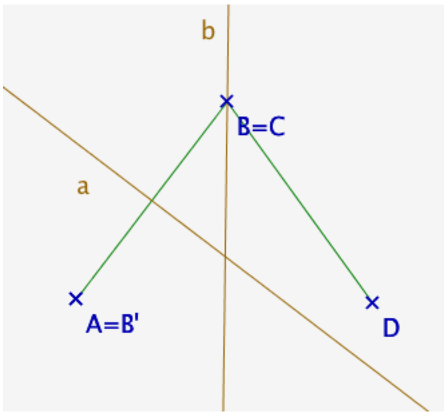
Marche à suivre
1. Tracer la droite $d = B'C'$.
2. Tracer le cercle $C(B', \overline{BS})$. Ce cercle coupe la droite d en deux points de part et d'autre de B' et S' est l'un de ces points.
3. Si S est sur la même demi-droite d'extrémité B et de support BC que C, alors S' est sur la même demi-droite d'extrémité B' et de support $B'C'$ que C'. Sinon, alors S' est sur l'autre demi-droite d'extrémité B' et de support $B'C'$ que C'.

3) Soient ABC un triangle, $A'B'C'$ son image sous l'isométrie f et S un point quelconque du plan. Nous justifions d'abord la méthode générale et puis la méthode plus simple au cas où S appartient au support d'un des côtés de ABC.

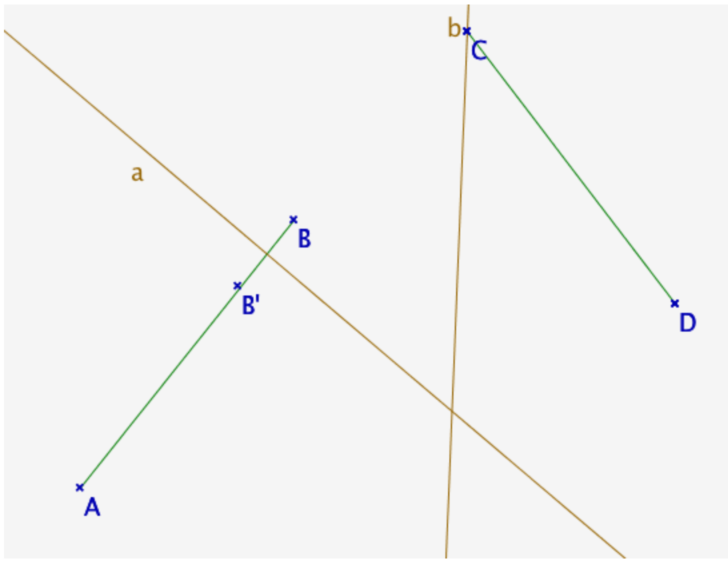
- Supposons que S n'appartient pas au support du côté $[AB]$. Alors nous savons d'après l'axiome de construction des triangles qu'en prenant les trois segments $[A'B'], [AS]$ et $[BS]$ qui remplissent $|\overline{AS} - \overline{BS}| < \overline{A'B'} < \overline{AS} + \overline{BS}$ (parce que S n'est pas sur AB) il existe deux points P et Q tels que $\overline{A'P} = \overline{A'Q} = \overline{AS}$ et $\overline{B'P} = \overline{B'Q} = \overline{BS}$. Comme les isométries conservent les demi-plans, c'est-à-dire que si H^1 et H^2 sont les demi-plans de frontière AB, alors leur images seront respectivement les demi-plans $H^{1'}$ et $H^{2'}$ de frontière $A'B'$. Ainsi l'image de $S \in H^1$ (respectivement H^2) sera le point construit qui appartient à $H^{1'}$ (respectivement $H^{2'}$).
- Supposons qu'il existe un côté de ABC dont le support contient S, supposons que $[AB]$ est ce côté et que $S \neq A$. Il existe deux points P et Q qui appartiennent à $A'B'$ de part et d'autre de A tels que $\overline{A'P} = \overline{A'Q} = \overline{AS}$. Supposons sans perte de généralité que P appartient à la même demi-droite d'extrémité A' que B' et que Q appartient à l'autre demi-droite d'extrémité A. Etant donné que les isométries conservent les demi-droites, si S appartient à la même demi-droite d'extrémité A que B alors S' sera le point P sinon ce sera le point Q.

Exercice 2

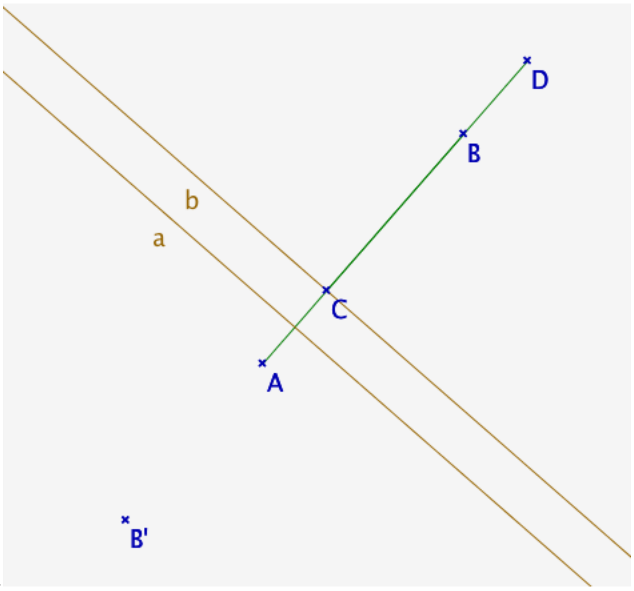
On trace la médiatrice a entre A et son image, c'est-à-dire C par convention. La réflexion associée à cette médiatrice envoie B sur B'. On trace alors la médiatrice b entre B' et l'autre extrémité du segment, ici D. Cette médiatrice passe par C, car comme les isométries préservent les distances nous avons $\overline{CD} = \overline{CB'}$. Et ainsi $S_b(B') = D$ et $S_b(C) = C$, donc $S_b \circ S_a$ envoie $[AB]$ sur $[CD]$.

1.


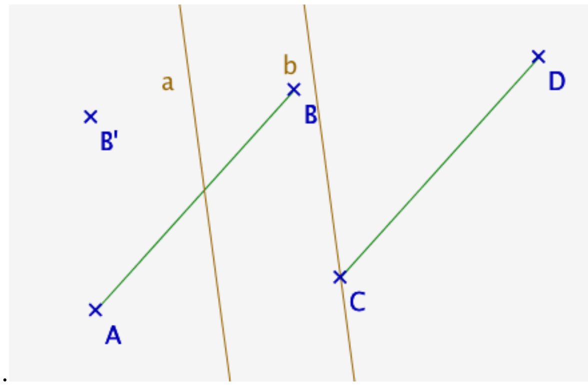
$f = S_b \circ S_a$

2.


$f = S_b \circ S_a$

3.


$f = S_b \circ S_a$

4.


$f = S_b \circ S_a$

Pour trouver cette deuxième isométrie, il suffit de pré-composer l'isométrie par S_{AB} ou de la post-composer par S_{CD}. En effet, si on pré-compose on a $S_b \circ S_a \circ S_{AB}(A) = S_b \circ S_a(A) = S_b(C) = C$ et $S_b \circ S_a \circ S_{AB}(B) = S_b \circ S_a(B) = S_b(B') = D$, donc cette isométrie envoie également $[AB]$ sur $[CD]$. On obtient le même résultat si on post-compose l'isométrie de départ par S_{CD}.
Non, il n'est pas toujours possible que l'une des deux isométrie soit une rotation, en effet dans le cas où les segments sont parallèles, l'isométrie qui envoie $[AB]$ sur $[CD]$ est la composition de deux réflexions dont les axes sont parallèles entres eux, mais comme on a vu qu'une isométrie est une rotation si et seulement si c'est une composition de deux réflexions dont les axes ont au moins un point en commun, cette isométrie ne sera pas une rotation. De plus, en trouvant la deuxième isométrie qui envoie $[AB]$ sur $[CD]$ à l'aide de la méthode citée ci-dessus, nous aurions une composition de trois réflexions, ce qui n'est pas une rotation. En effet, nous avons vu en cours qu'une composition d'un nombre pair de réflexions préserve l'orientation alors qu'un nombre impair de rotation ne préserve pas les orientations, ainsi une composition de trois réflexions ne peux pas être égale à une composition de deux réflexions.

Exercice 3

On rappelle que la somme des angles d'un triangle est 180° et celle d'un quadrilatère est 360°.

a) $\widehat{PRQ} = 180 - \widehat{RPQ} - \widehat{PQR} = 180 - 90 - 54 = 36$

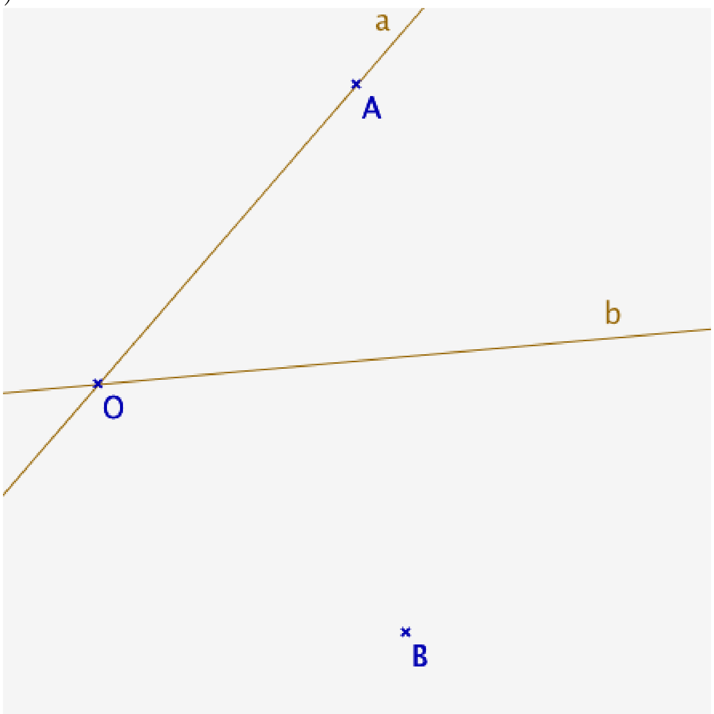
b) $\widehat{CBA} = \widehat{BCA}$ car ABC est isocèle en A.
$\widehat{CBA} = 180 - \widehat{BCA} - \widehat{BAC} = 180 - \widehat{CBA} - 42$
$\widehat{CBA} = \frac{180-42}{2} = 69$

c) $\widehat{LMN} = \widehat{MNL} = \widehat{NLM}$
$\widehat{LMN} + \widehat{MNL} + \widehat{NLM} = 180$
Donc $\widehat{LMN} = 60$

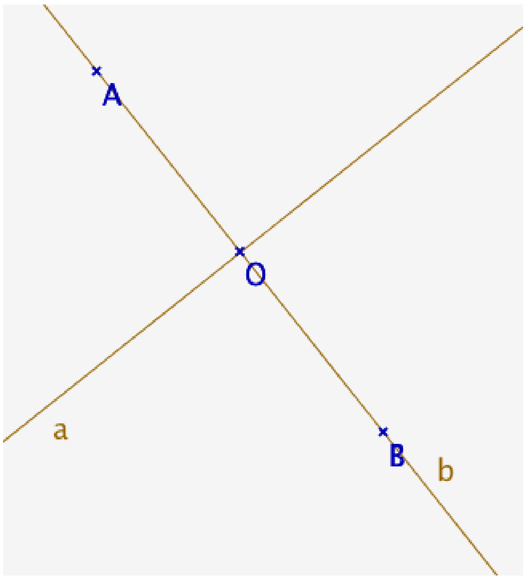
d) $\widehat{VUT} = 180 - (25 + 40) = 115$. Les angles extérieurs du triangles sont supplémentaires aux angles intérieurs associés. Par exemple, l'angle extérieur en U vaut $180 - 115 = 65$.

Exercice 4

1)



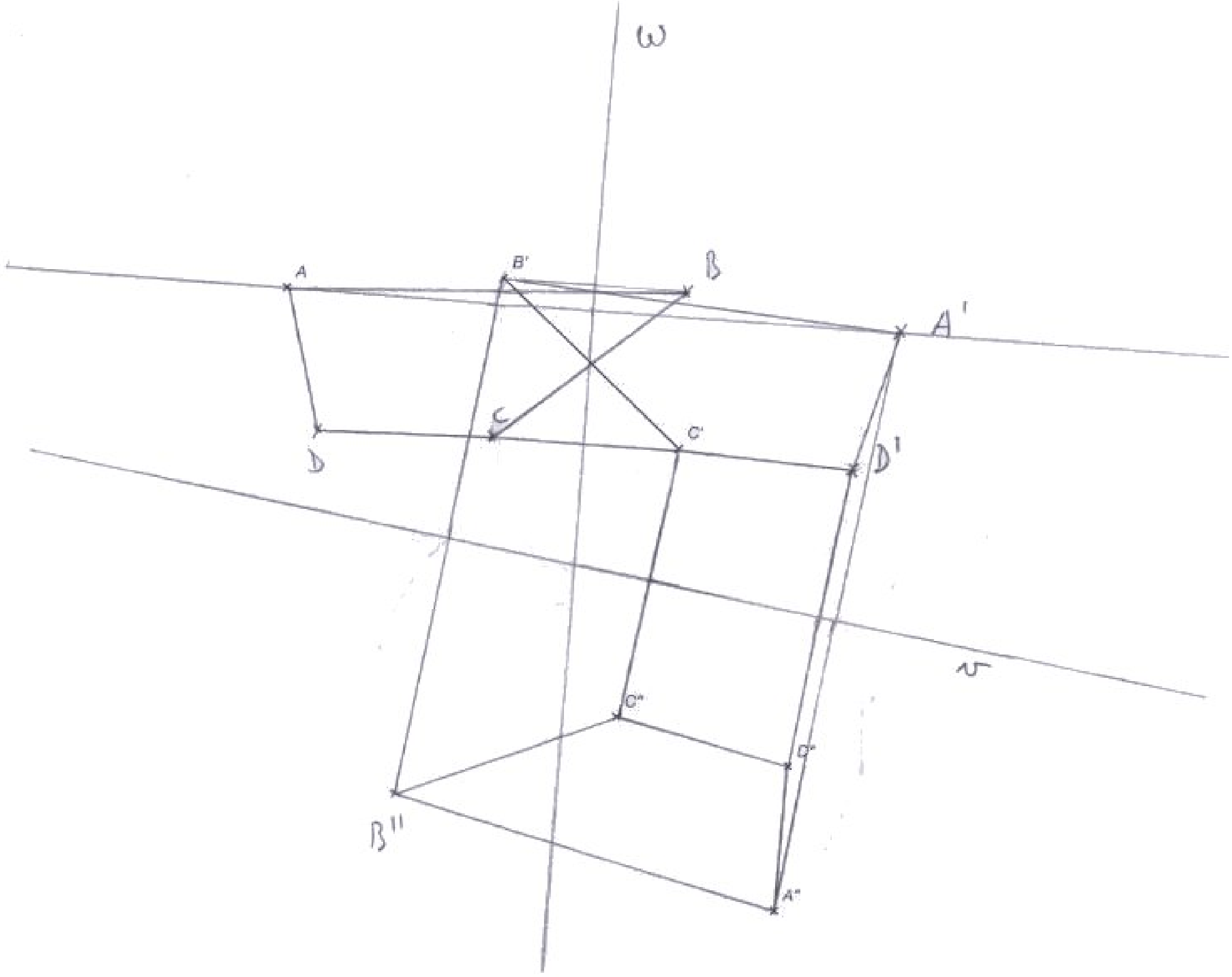
2)



3) Nous devons montrer qu'une symétrie centrale S de centre O n'a qu'un seul point fixe. Nous savons déjà par définition que $S(O) = O$, nous devons donc démontrer qu'il s'agit du seul point fixe de cette isométrie. Soit P un point distinct de O, alors $S(P)$ est tel que O est le milieu du segment $[P, S(P)]$. D'après un théorème du cours, la médiatrice de $[P, S(P)]$ passe par O et est perpendiculaire à la droite $P, S(P)$, elle est donc distincte de $P, S(P)$, ainsi leur unique point d'intersection est O. De plus elle envoie P sur $S(P)$. Comme P n'appartient pas à cette médiatrice, il ne sera pas un point fixe.
Nous avons bien montré que si S est une symétrie centrale de centre O elle ne possédera qu'un unique point fixe qui est son centre, c'est donc une rotation.
Comme S est une symétrie centrale de centre O, c'est une rotation de centre O, nous pouvons donc choisir arbitrairement le premier axe passant par O, prenons donc l'unique droite a passant par un point A distinct de O et son image par S que l'on note $A' = S(A)$. Comme O est le milieu de $[AA']$, $O \in a$. Soit b la droite telle que $S = S_b \circ S_a$, on a $S(A) = S_b \circ S_a(A) = S_b(A) = A' \Leftrightarrow b$ est la médiatrice de $[AA']$. On a donc b perpendiculaire à a.

Exercice 5

On sait que C'' est l'image de C' par une des symétries. Donc l'un des axes de symétrie est la médiatrice de $C'C''$. Ainsi on peut tracer le quadrilatère $A'B'C'D'$.
Ensuite on sait que A' est l'image de A par une des symétries. Donc l'autre axe de symétrie est la médiatrice de $A'A$. On peut alors tracer le quadrilatère $ABCD$.



Exercice 6

Corrigé

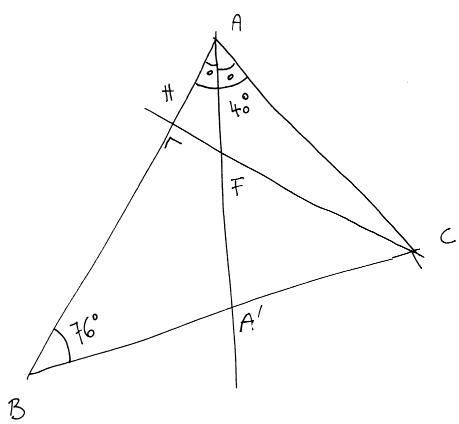
205.

$\widehat{BCH} = 90 - 76 = 14°$

$\widehat{BCA} = 180 - (40 + 76) = 64°$

$\widehat{ACF} = 64 - 14 = 50°$

$\widehat{AFC} = 180 - (50 + 20) = 110°$



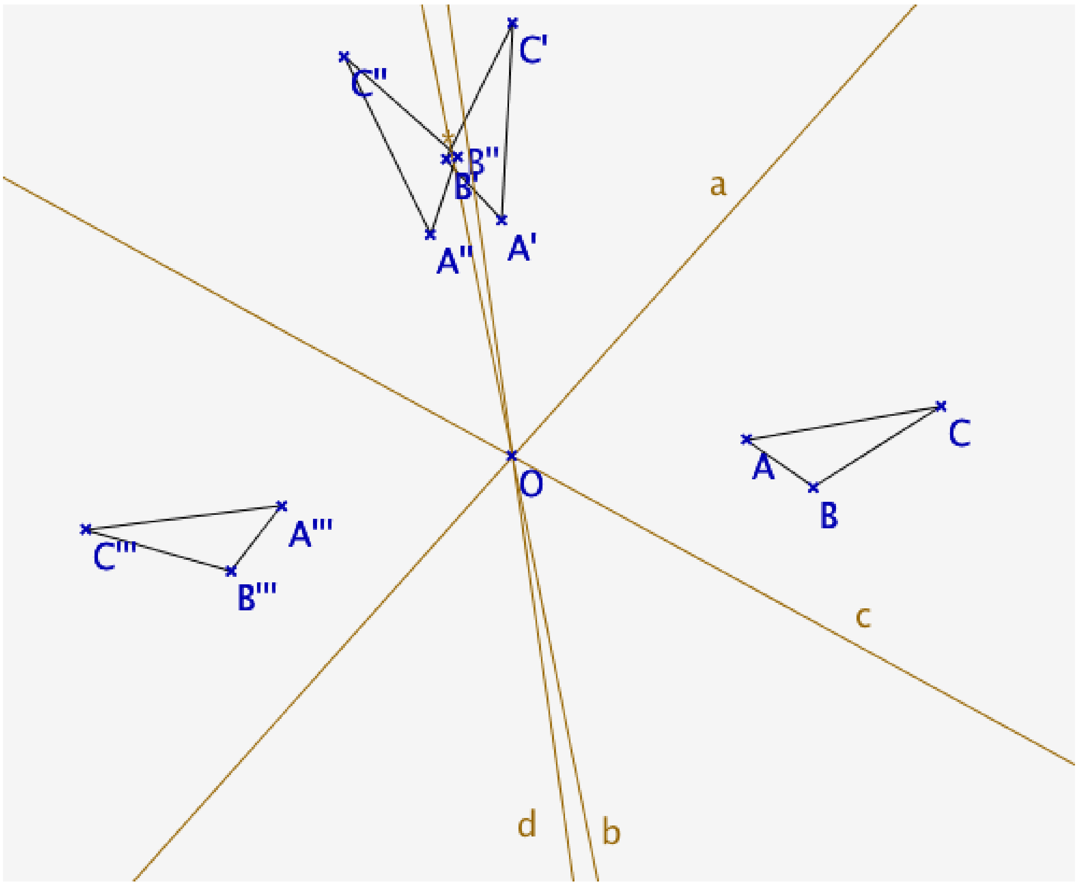
Justifications.
<u>calcul de $\widehat{BCH}$</u> : Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{HBC}+\widehat{BHC}+\widehat{BCH}=180$. Ainsi, $\widehat{BCH}=180-\widehat{HBC}-\widehat{BHC}=180-76-90=14$.

<u>calcul de $\widehat{BCA}$</u> : Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{BCA}+\widehat{CAB}+\widehat{ABC}=180$. Ainsi, $\widehat{BCA}=180-\widehat{CAB}-\widehat{ABC}=180-40-76=64$.

<u>calcul de $\widehat{ACF}$</u> : Comme $\widehat{BCH}$ et $\widehat{ACF}$ sont adjacents : $\widehat{ACF}=\widehat{BCA}-\widehat{BCH}$.

<u>calcul de $\widehat{AFC}$</u> : Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° : $180=\widehat{AFC}+\widehat{ACF}+\widehat{FAC}=\widehat{AFC}+\widehat{ACF}+\frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Ainsi, $\widehat{AFC}=180-\widehat{ACF}-\frac{1}{2}\widehat{BAC}=180-50-\frac{40}{2}=110$.

Exercice 7



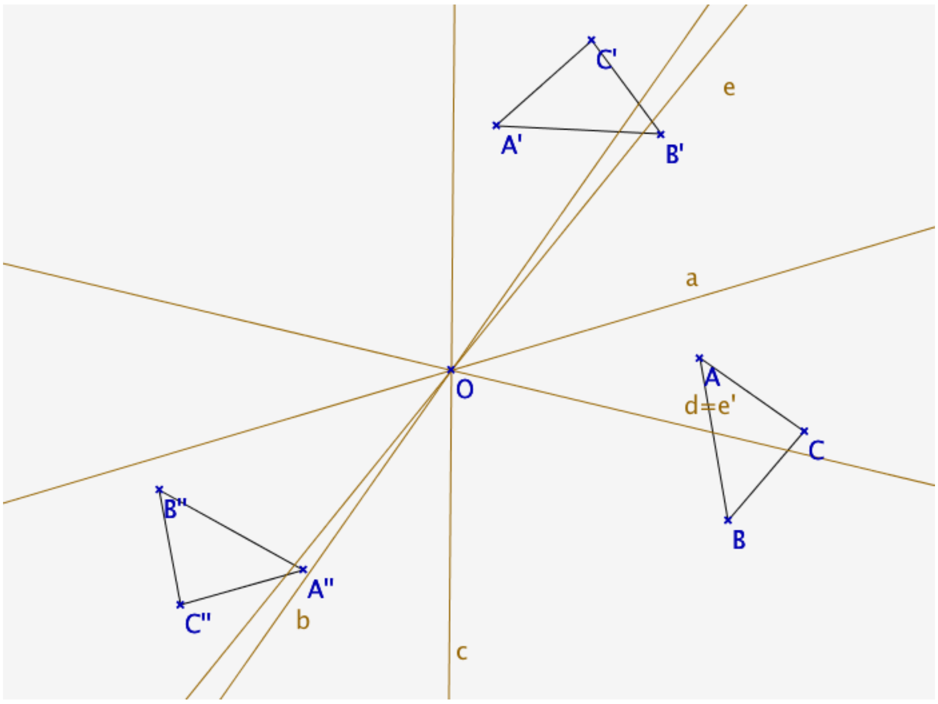
Nous remarquons que le résultat est le même que si nous avions construit l'image de ABC sous une réflexion. Pour construire cet axe, il suffit de construire la médiatrice entre un des points de ABC et de son image $A'''B'''C'''$.
Comme $S_c \circ S_b \circ S_a = (S_c \circ S_b) \circ S_a$ où c et b sont des droites concourantes en O. Ainsi $S_c \circ S_b$ est une rotation de centre O. D'après le cours, nous pouvons choisir la première droite arbitrairement et obtenir la même rotation. Ainsi si nous choisissons astucieusement a elle-même comme première droite ! Il existe alors une droite d dans le plan telle que $S_c \circ S_b = S_d \circ S_a$, et ainsi :

$$S_c \circ S_b \circ S_a = (S_d \circ S_a) \circ S_a = S_d \circ (S_a \circ S_a) = S_d$$

C'est donc bien une réflexion.

Exercice 8

Notons $A'B'C'$ l'image de ABC par R et $A''B''C''$ l'image de $A'B'C'$ par R'.

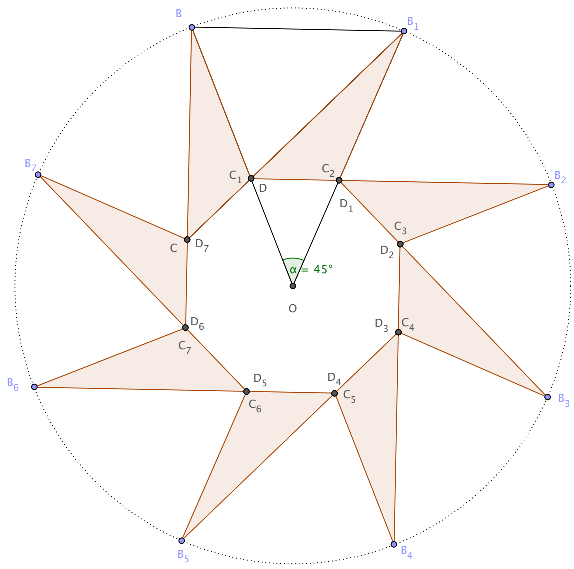


On constate que le résultat est le même que si nous avions construit l'image de ABC par une rotation de centre O.
Comme nous pouvons choisir l'un des axes de chaque rotation arbitrairement à la seule condition qu'ils se coupent en O, nous pouvons choisir comme deuxième axe de R la droite c et ainsi il existe e une droite du plan telle que $R = S_c \circ R_e$. Or,

$$R' \circ R = S_d \circ S_c \circ S_c \circ S_e = S_d \circ S_e$$

où e et d sont deux droites concourantes en O. Le résultat est donc bien une rotation de centre O.

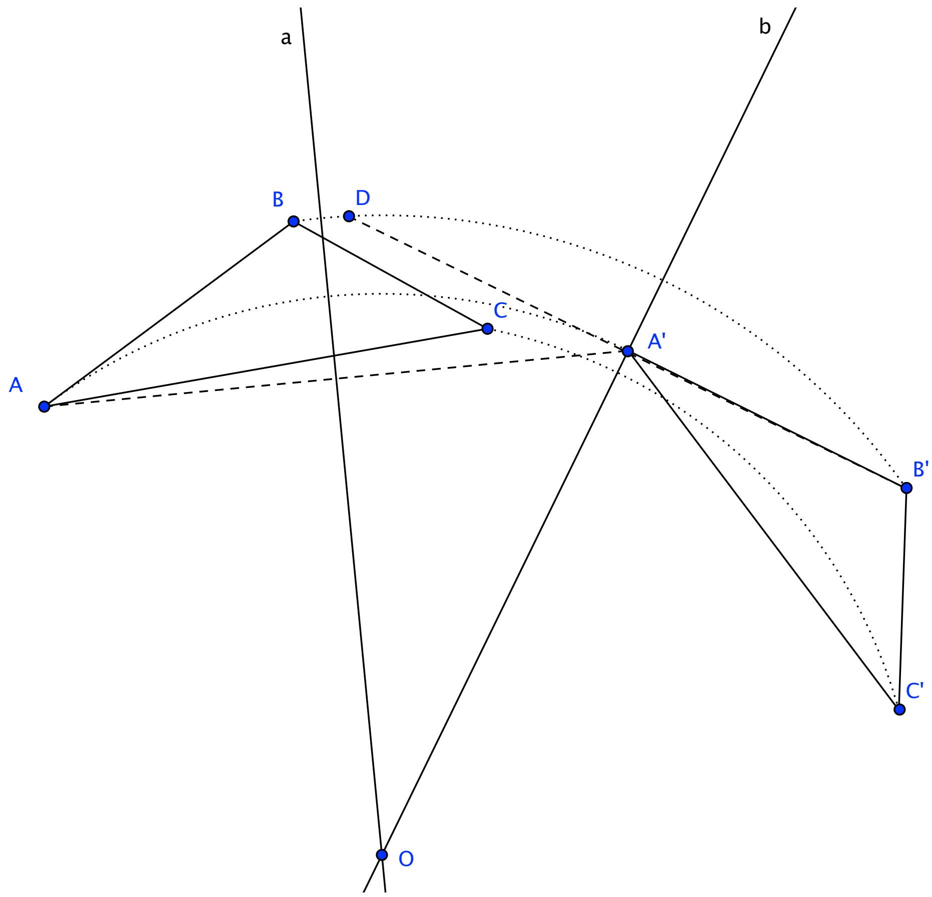
Exercice 9



Le triangle isocèle OAB a un angle de 45° au sommet O si bien que les deux autres angles valent 67,5°. Le triangle ABC est un triangle rectangle en B si bien que les angles en A et C valent 45°. L'angle $\widehat{COD}$ vaut 45° car le triangle OCB est isométrique au triangle ODA...

Exercice 10

(1) Les arcs de cercle de centre O passant par A, B et C sont indiqués en pointillé sur la figure :



Comme la rotation est une isométrie, le point B' par exemple est les des deux points sur le cercle de centre O et de rayon $\overline{OB}$ se trouvant à une distance $\overline{AB}$ du point A'. Le choix du point se fait en comparant les angles $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$.

(2) Il y a de nombreaux choix possibles pour les axes a et b puisque le choix du premier axe est libre parmi toutes les droites passant par O. Sur la figue ci-dessus j'ai choisi d'abord pour a la médiatrice de $[AA']$. Ainsi S_a transforme A en A'. On construit alors le point $D = S_a(B)$ et nous devons choisir alors pour b la médiatrice de $[DB']$, c'est-à-dire la droite OA'. De cette façon on a bien

$$(S_b \circ S_a)(B) = S_b(S_a(B)) = S_b(D) = B'$$

Puisque $A' \in b$, cette composition transforme A en A' et B en B'. C'est une rotation et cela doit donc être $\mathcal{R}(O, \widehat{AOA'})$.

(3) L'autre isométrie que $\mathcal{R}$ qui transforme A en A' et B en B' est une composition de trois symétries axiales. Il faut choisir $c = A'B'$ et poser $f = S_c \circ S_b \circ S_a$. Comme $S_b \circ S_a$ transforme A en A' et B en B' et que S_c fixe ces deux points, la composition f transforme aussi A en A' et B en B'. Ce n'est par contre pas une rotation, mais une symétrie axiale comme nous l'avons vu en exercice.

(4) Faux ! La composition de deux symétries axiales n' est une rotation que si les axes se coupent en un point. Lorsque les axes a et b sont *parallèles* la composition $S_b \circ S_a$ n'est pas une rotation. Nous verrons au printemps qu'il s'agit alors d'une translation...

Exercice 11

Calcul d'angles. (25 points)
(1) L'angle $\hat{Z}$ du triangle ΔZCY et l'angle 3α en A sont correspondants. Puisque les droites AB et CD sont parallèles le Théorème de la transversale permet de conclure que $\hat{Z} = 60°$.
Passons à l'angle $\hat{C}$. L'angle $\widehat{ACZ}$ et $\widehat{BAC}$ sont alterne-internes si bien qu'ils sont isométriques à nouveau par le Théorème de la transversale, ainsi $\widehat{ACZ} = 40°$.
D'autre part l'angle $\widehat{ACE}$ mesure 70° par le Théorème de la somme des angles pour le triangle ΔACE dont on connaît les deux autres angles, mesurant 20° et 90°. Puisque l'angle $\widehat{ECY}$ est plat et mesure 180° on en conclut alors que $\hat{C} = 180° - 40° - 70° = 70°$.
On conclut alors par le Théorème de la somme des angles pour le triangle ΔZCY que $\hat{Y} = 50°$.

(2) On construit maintenant un point X sur la droite AB de sorte que l'angle $\widehat{CDX}$ mesure 40 degrés. La droite AC coupe la droite DC à 40° par le Théorème de la transversale puisque l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 40° (on considère par exemple des angles alternes-internes).
On applique maintenant la *réciproque* du Théorème de la transversale pour conclure que les droites XD et AC sont parallèles, les angles de 40° étant correspondants.

De fait $X = B$ et donc l'angle $\widehat{CDB} = 40°$. C'est probablement la partie la plus difficile à justifier. On peut par exemple constater que E est le milieu de $[AD]$ car les triangles ΔEAC et ΔEDC sont isométriques, les angles étant isométriques deux à deux et ils ont un côté commun. Ceci implique qu'ils sont en fait isométriques par la symétrie axiale d'axe EC.
Par conséquent l'image par cette symétrie du triangle ΔABC est le triangle ΔDBC. L'angle en D doit être isométrique à $\widehat{BAC}$ qui mesure 40°.

Exercice 12

En vrac. (25 points)

(1) C'est vrai. En effet, considérons deux points P' et Q', dont les images P et Q par f^{-1} sont telles que, par définition de l'inverse, $f(P) = P'$ et $f(Q) = Q'$. On doit montrer que la distance $\overline{P'Q'}$ est égale à la distance $\overline{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')}$. Calculons donc :
$$\overline{P'Q'} = \overline{f(P)f(Q)} = \overline{PQ}$$
par définition de P et Q pour la première égalité et par le fait que f est isométrie pour la deuxième.

(2) C'est faux. C'est le cas que lorsque les quatre axes se coupent en un point, mais pas en général. La composition de deux symétries centrales par exemple est une translation si les centres sont distincts.

(3) On trace un cercle de rayon $[AB]$, puis on construit les cercles de même rayon, mais centré successivement en B et en les points d'intersection suivants de ces cercles avec le cercle initial. La justification est que tous les triangles construits, à commencer par ΔABC, puis δACD, etc. sont équilatéraux. L'angle en A vaut donc 60°, qui est un sixième d'un tour complet.

(4) C'est vrai. La définition de figure convexe est que tout segment reliant deux point de la figure est entièrement contenu dans la figure.

(5) Toute isométrie peut être obtenue comme composition de trois symétries axiales au maximum. Or, une composition de sept symétries axiales renverse l'orientation. Il doit donc s'agir obligatoirement d'une composition d'une ou trois symétries axiales, un nombre pair (0, 2 ou 4) donnerait en effet une isométrie qui préserve l'orientation.