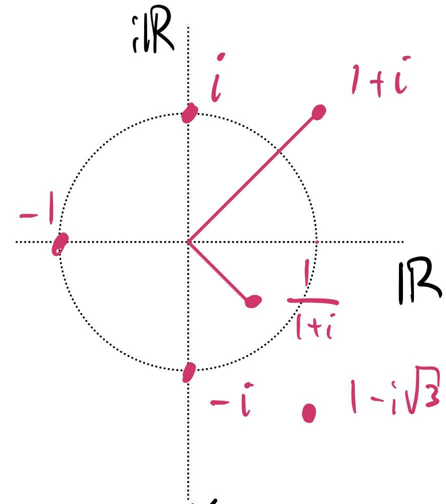
2.6 Exemples



1) $i = 1 \cdot e^{i\pi/2} = e^{i\pi/2}$

2) $-1 = 1 \cdot e^{i\pi} = e^{i\pi}$

3) $-i = 1 \cdot e^{-i\pi/2} = e^{-i\pi/2}$

4) $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

5) $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4}$ (en appliquant la formule de l'inverse).

$ \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}_{1/\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4}$$

6) $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\pi/3}$

7) $(1-i\sqrt{3})^{30} = 2^{30} e^{(-i\pi/3)\cdot 30} = 2^{30} e^{-10i\pi} = 2^{30}$.

fin cours 10/10/22

2.7 Racines n-ièmes

Prop : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $w \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe n nombres complexes distincts $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}^*$ tels que pour $k = 0, \dots, n-1$

$$z_k^n = w$$ (lettre grecque oméga)

- Ces nombres sont appelés les racines n-ièmes de w.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $w = 0$ alors l'unique solution de $z^n = 0$ est 0.

Méthode de résolution à l'aide de l'écriture polaire :

(i) Ecrire w sous forme polaire : $w = |w| e^{i(\varphi + 2k\pi)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

(ii) Multiplier l'exposant par $\frac{1}{n}$: $z_k = |w|^{1/n} e^{i(\varphi/n + \frac{2k\pi}{n})}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

Exemples :

(1) Racines (carrées) de l'unité : $z^2 = 1$ (ici $n=2$)

(i) $1 = 1 \cdot e^{i(0 + 2k\pi)}$, $k = 0, 1$

(ii) $z_k = 1^{1/2} e^{i\frac{2k\pi}{2}}$, $k = 0, 1$

les 2 racines sont $z_0 = 1$ et $z_1 = 1 e^{i\pi} = -1$

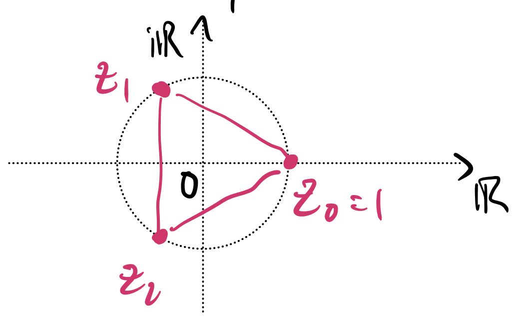
(2) Racines troisièmes de l'unité : $z^3 = 1$ (ici $n = 3$)

(i) $1 = 1 \cdot e^{i(0 + 2k\pi)}$, $k = 0, 1, 2$

(ii) $z_k = 1^{1/3} e^{i2k\pi/3}$, $k = 0, 1, 2$

Les 3 racines troisièmes de 1 sont :

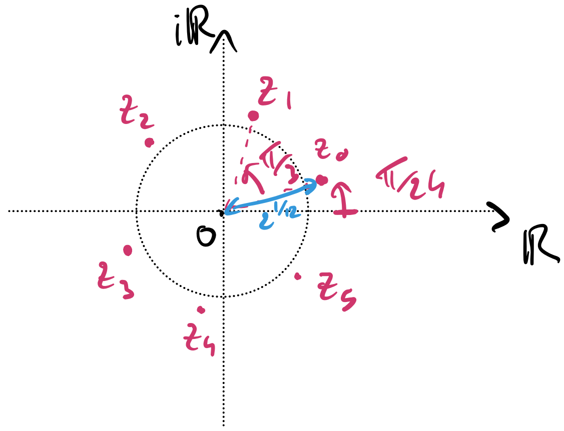
$z_0 = 1$ et $z_1 = e^{i2\pi/3}$ et $z_2 = e^{i4\pi/3} = e^{-i2\pi/3}$



(3) $z^6 = 1 + i$

(i) $1 + i = \sqrt{2} e^{i(\pi/4 + 2k\pi)}$, $k = 0, 1, \dots, 5$

(ii) $z_k = 2^{1/12} e^{i(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{3})}$, $k = 0, 1, \dots, 5$



2.8 Racines de polynômes complexes

Un polynôme est une fonction $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_n z^n$$

où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$

- On dit que ce polynôme est de degré n
- Une racine $z \in \mathbb{C}$ de P est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

Prop: Si z_0 est une racine, alors $P(z) = (z - z_0)\,Q(z)$ où Q est un polynôme de degré (~~inférieur ou~~) égal à $n-1$.

(admis)

Théorème fondamental de l'algèbre: Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré n.

Alors P est factorisable en produit de polynômes complexes de degré 1, c'est-à-dire que il existe $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ pas nécessairement distincts tels que $P(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$.

En particulier $P(z_k) = 0$ pour $k = 1, \dots, n$.

(admis).

Cas particulier explicite : polynômes de degré 2.

Prop : Soit $P(z) = a z^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$

Alors P admet 2 racines dans $\mathbb{C}$ (pas nécessairement distinctes) :

Pour $k = 0, 1$: $z_k = \dfrac{-b + w_k}{2a}$ où w_k $(k = 0,1)$ sont les racines complexes de $b^2 - 4ac$ (distinctes si $b^2 - 4ac \neq 0$)

(discriminant complexe)

De plus, on a $P(z) = a(z - z_0)(z - z_1)$.

Preuve :
$$P(z) = a z^2 + bz + c$$
$$= a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Donc
$$P(z) = 0 \iff a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
$$\iff \left[2a\left(z + \frac{b}{2a}\right)\right]^2 = b^2 - 4ac$$
$$\iff 2a\left(z + \frac{b}{2a}\right) = w_k \quad , \quad k = 0, 1$$
$$\iff z + \frac{b}{2a} = \frac{w_k}{2a}$$
$$\iff z = \frac{-b}{2a} + \frac{w_k}{2a}$$
$\blacksquare$

Cas des polynômes à coefficients réels : Si $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $P(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$, alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{P(z)} = P(\overline{z})$$ (car $\overline{z^k} = \overline{z}^k$: le vérifier)

Donc si $P(z) = 0$ alors $P(\overline{z}) = 0$

Donc les racines de P sont soit réelles, soit des paires de complexes conjugués.

Or on a
$$(z - z_k)(z - \overline{z_k}) = z^2 - (z_k + \overline{z_k})z + z_k \overline{z_k}$$
$$= z^2 - \underbrace{2\,\mathrm{Re}(z_k)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{|z_k|^2}_{\in \mathbb{R}}$$

On en déduit :

Prop : Tout polynôme réel est factorisable en produit de polynômes réels de degré 1 ou 2.

⇝ les facteurs sont - soit affines $(z - z_k)$ avec $z_k \in \mathbb{R}$
- soit quadratiques $(z^2 + bz + c)$ avec $b, c \in \mathbb{R}$ et $b^2 - 4c < 0$

Quelques exemples :

(1) $P(z) = z^2 - 2z + 1$
$= (z-1)^2 = (z-1)(z-1)$ ← factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

(2) $P(z) = z^2 - 1$
$= (z+1)(z-1)$ ← factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

(3) $P(z) = z^3 - 1$ (racines troisièmes de 1 : $1 ; e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$)
$= (z-1)(z - e^{2i\pi/3})(z - e^{-2i\pi/3})$ ← factorisat° dans $\mathbb{C}$
$= (z-1)(z^2 - (e^{2i\pi/3} + e^{-2i\pi/3})z + e^{2i\pi/3} \cdot e^{-2i\pi/3})$
$= (z-1)(z^2 + z + 1)$ ← factorisation dans $\mathbb{R}$
↳ car $\mathrm{Re}(e^{2i\pi/3}) = -\frac{1}{2}$

(3') $P(z) = z^2 + z + 1 = (z - e^{2i\pi/3})(z - e^{-2i\pi/3})$
↳ Se retrouve à l'aide des formules pour les polynômes de degré 2.

(4) $P(z) = z^4 - 1$
$= (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z-1)(z+1)(z^2+1)$ ← factorisation dans $\mathbb{R}$
$= (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$ ← factorisation dans $\mathbb{C}$.

fin cours 13/10