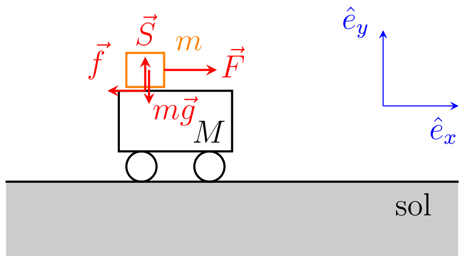
Corrigé 5 : forces de frottement

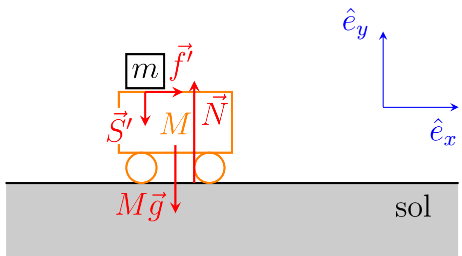
1. **Force de frottement**

   (a) On considère successivement l'objet (le système) m et l'objet chariot :



Objet (système) : masse m

Forces : poids $m\vec{g}$, soutien $\vec{S} = -m\vec{g}$ du chariot (force de liaison), frottement $\vec{f}$ et force $\vec{F}$



Objet (système) : chariot de masse M

Forces : poids $M\vec{g}$, soutien $\vec{N}$ du sol (force de liaison), force verticale $\vec{S}'$ exercée par m (avec $\vec{S}' = -\vec{S} = m\vec{g}$) et frottement $\vec{f}'$ (avec $\vec{f}' = -\vec{f}$)

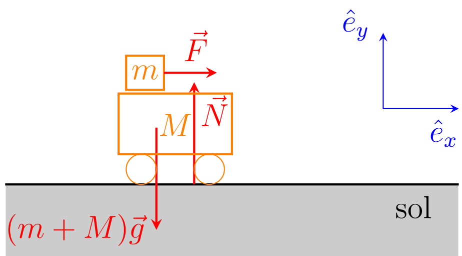
   (b) Pour le chariot, la deuxième équation de Newton s'écrit

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{S}' + \vec{f} = M\vec{a}_M \,.$$

Le chariot ne se déplace pas verticalement. Horizontalement (selon $\hat{e}_x$), il vient

$$f = Ma_M \,.$$

Pour déterminer l'accélération a_M, on peut considérer le système "masse m + chariot", m et le chariot étant solidaires ($\vec{a}_M = \vec{a}_m = \vec{a}_{M+m}$).



Système (objet) : masse m et chariot

Forces : poids $(M+m)\vec{g}$, soutien $\vec{N}$ du sol et force $\vec{F}$

L'équation de Newton,

$$\vec{F} + (m+M)\vec{g} + \vec{N} = (m+M)\vec{a}_{M+m} \,,$$

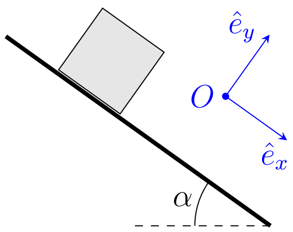
projetée selon $\hat{e}_x$, fournit

$$F = (m+M)a_{M+m} \,.$$

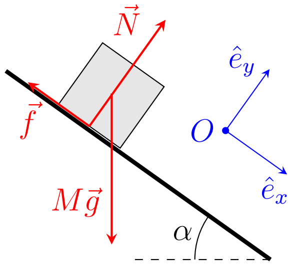
Avec $a_M = a_{M+m}$, nous avons finalement

$$f = Ma_M = \frac{M}{m+M}F \,.$$

2. **Coefficients de frottement statique/cinétique**
On choisit un repère orthonormé dont l'axe x est parallèle au plan incliné (voir dessin) et on détermine les forces en les décomposant selon ce repère.



Les forces extérieures exercées sur l'objet de masse M sont le poids $M\vec{g}$, la force de soutien $\vec{N}$ (force de réaction ou de liaison) et une force de frottement $\vec{f}$ (frottement statique quand le cube est immobile et frottement cinétique quand le cube glisse) :



Lorsque le cube ne glisse pas, $|\vec{f}| \leq \mu_s|\vec{N}|$, où μ_s est le coefficient de frottement statique.
Lorsque le cube glisse, $|\vec{f}| = \mu_c|\vec{N}|$, où μ_c est le coefficient de frottement cinétique.

Juste avant de se mettre en mouvement ($\alpha = \alpha_0$), la masse M est encore immobile et son accélération est nulle. La deuxième loi de Newton s'écrit alors

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = \vec{0}\,.$$

Pour déterminer les forces, on les décompose selon le repère $O\hat{e}_x\hat{e}_y$:

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{e}_x : &\quad Mg\sin\alpha_0 + 0 - f = 0\,, \\ \text{selon } \hat{e}_y : &\quad -Mg\cos\alpha_0 + N + 0 = 0\,. \end{aligned}$$

On obtient alors immédiatement l'expression de la force de soutien :

$$N = Mg\cos\alpha_0\,.$$

En tenant compte de la relation $|\vec{f}| = \mu_s|\vec{N}|$ (le frottement est maximal), il vient alors finalement

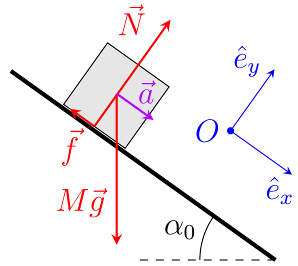
$$f = Mg\sin\alpha_0 = \mu_s Mg\cos\alpha_0 \quad\Rightarrow\quad \mu_s = \tan\alpha_0\,.$$

Après s'être mis en mouvement, le cube subit une force de frottement dont la norme est donnée par

$$|\vec{f}| = \mu_c|\vec{N}|\,,$$

et il est accéléré vers le bas selon la deuxième loi de Newton

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = M\vec{a}\,.$$



La décomposition des forces selon le repère $O\hat{e}_x\hat{e}_y$ fournit :

$$\begin{aligned}
\text{selon } \hat{e}_x : &\quad Mg\sin\alpha_0 + 0 - f = Ma_x = Ma\,, \\
\text{selon } \hat{e}_y : &\quad -Mg\cos\alpha_0 + N + 0 = 0\,.
\end{aligned}$$

On obtient alors immédiatement l'expression de la force de soutien :

$$N = Mg\cos\alpha_0\,.$$

En tenant compte de la relation $|\vec{f}| = \mu_c|\vec{N}|$, la projection selon $\hat{e}_x$ devient

$$Mg\sin\alpha_0 - \mu_c Mg\cos\alpha_0 = Ma \quad \Rightarrow \quad \mu_c = \frac{g\sin\alpha_0 - a}{g\cos\alpha_0} = \tan\alpha_0 - \frac{a}{g\cos\alpha_0}\,.$$

D'autre part, comme l'accélération est constante, nous pouvons écrire, en plaçant l'origine à l'extrémité gauche de la planche,

$$x(T) = L = \frac{1}{2}aT^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2L}{T^2}\,.$$

Ainsi, le coefficient de frottement cinétique a finalement pour expression

$$\mu_c = \tan\alpha_0 - \frac{2L}{gT^2\cos\alpha_0} = \mu_s - \frac{2L}{gT^2\cos\alpha_0} < \mu_s\,.$$