Corrigé Série 05 : Forces de frottement

Rappel de cours : *Une force de frottement cinétique exercée par une surface sur un objet est toujours opposée à la direction du mouvement de l'objet par rapport à la surface ; sa norme vaut toujours $\mu_c|\vec{N}|$, où $\vec{N}$ est la force de liaison normale que la surface exerce sur l'objet et μ_c, le coefficient de frottement cinétique. Une force de frottement statique exercée par une surface sur un objet est toujours opposée à la direction du mouvement que l'objet aurait par rapport à la surface en l'absence de cette force. Sa norme s'adapte pour que l'objet reste immobile, mais ne peut jamais dépasser la valeur maximale de $\mu_s|\vec{N}|$, où μ_s est le coefficient de frottement statique. Si la norme devait dépasser cette valeur maximale, alors l'objet se met à glisser (et c'est le frottement cinétique, et non statique, qui entre en jeu).*

Questions conceptuelles

a) La force de frottement sec entre les semelles des chaussures et le sol nous permet de nous arrêter d'un coup. En outre, sans elle, nous ne pourrions pas marcher ou courir, puisque les semelles des chaussures glisseraient sur le sol et ne pourraient contribuer à l'accélération.

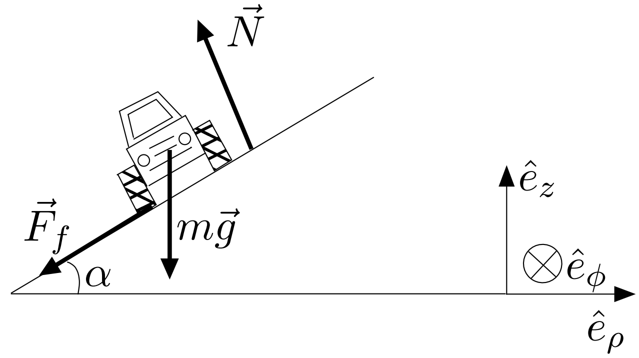
b) En négligeant les frottements de l'air, la seule force qui s'applique sur un bloc de masse m est son poids $m\vec{g}$. La deuxième loi de Newton donne alors $m\vec{a} = m\vec{g}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$, indépendemment de la masse du bloc.

c) L'équilibre du paquet requiert une force verticale vers le haut qui s'oppose au poids $m\vec{g}$ du paquet. Il s'agit d'une force de frottement statique, qui ne peut être exercée que par votre main ou par le mur. Comme la force exercée par votre main $\vec{F}_{\text{main}}$ est horizontale, elle ne peut pas avoir de composante verticale. Donc la force de frottement doit être exercée par le mur. Si le mur est parfaitement glissant (coefficient de frottement statique μ_{s} nul), il ne peut pas exercer de force de frottement, donc la réponse à la question est "non". Si le mur n'est pas parfaitement glissant ($\mu_{\text{s}} > 0$), la réponse à la question est "oui", pour autant que la force de frottement maximale possible, $\mu_{\text{s}} F_{\text{main}}$, soit supérieure à mg.

1 Voiture dans un virage

a) Trois forces s'exercent sur la voiture (voir dessin) :
   - le poids de la voiture $m\vec{g}$.
   - la force de soutien $\vec{N}$ perpendiculaire à la route.
   - une force de frottement statique $\vec{F}_f$, tangente à la route, perpendiculaire à la vitesse et dirigée vers l'intérieur du virage pour empêcher la voiture de déraper vers l'extérieur.

   On utilise un repère associé aux coordonnées cylindriques.



b) Pour trouver la vitesse maximale que peut prendre la voiture, on utilise la deuxième loi de Newton

$$\vec{F}_f + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}. \tag{1}$$

L'accélération en coordonnées cylindriques s'écrit sous forme vectorielle :

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2 \hat{e}_\rho + R\ddot{\phi}\hat{e}_\phi, \tag{2}$$

où l'on a introduit les contraintes $\rho = R$ et $z =$ constante. Comme le mouvement est circulaire et uniforme, $\ddot{\phi} = 0$ et donc $\dot{\phi} =$ constante $= \pm v/R$. L'accélération n'a qu'une composante selon $\hat{e}_\rho$ et est dirigée vers le centre de la trajectoire. On projette l'équation du mouvement (1) sur les axes

$$\text{sur } \hat{e}_\rho : \qquad -F_f \cos\alpha - N \sin\alpha = -m\frac{v^2}{R}, \tag{3}$$

$$\text{sur } \hat{e}_z : \qquad N\cos\alpha - mg - F_f \sin\alpha = 0. \tag{4}$$

où F_f est la norme du vecteur $\vec{F}_f$ et N est la norme du vecteur $\vec{N}$. Par définition, une norme est toujours positive ou nulle.

On résout les équations (3) et (4) pour trouver les expressions de F_f et N :

$$F_f = mg\cos\alpha\left(\frac{v^2}{gR} - \tan\alpha\right), \tag{5}$$

$$N = mg\cos\alpha\left(1 + \frac{v^2}{gR}\tan\alpha\right). \tag{6}$$

On constate que l'expression de F_f n'est positive que si $v^2 > gR\tan\alpha$, ce qui correspond au cas que nous discutons, où la vitesse est suffisamment grande pour que la force de frottement soit dirigée comme sur le dessin.

La condition pour que la voiture ne dérape pas vers l'extérieur est $F_f \leq \mu N$, c'est-à-dire :

$$\frac{v^2}{gR} - \tan\alpha \leq \mu\left(1 + \frac{v^2}{gR}\tan\alpha\right), \tag{7}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{v^2}{gR}(1 - \mu\tan\alpha) \leq \mu + \tan\alpha. \tag{8}$$

Deux cas doivent être considérés :

i) Si $1-\mu\tan\alpha \leq 0$, c'est-à-dire si $\tan\alpha \geq \frac{1}{\mu}$, alors la condition est automatiquement satisfaite. Dans ce cas, la voiture ne peut pas déraper vers l'extérieur et la force de frottement ne peut jamais atteindre sa valeur maximale, même si la vitesse tend vers l'infini.

ii) Si $1-\mu\tan\alpha > 0$, c'est-à-dire si $\tan\alpha < \frac{1}{\mu}$, alors la condition devient

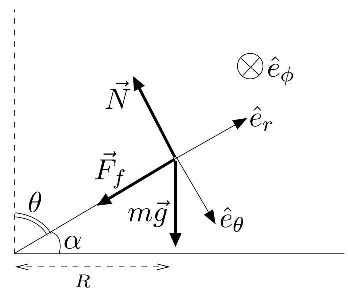
$$\frac{v^2}{gR} \leq \frac{\mu+\tan\alpha}{1-\mu\tan\alpha}. \tag{9}$$

Soit finalement,

$$v \leq \sqrt{gR\frac{\mu+\tan\alpha}{1-\mu\tan\alpha}} \tag{10}$$

Une analyse dimensionnelle montre que le membre de droite a bien la dimension d'une vitesse.
Application numérique : $v_{\max} = \sqrt{10\times 300\frac{1+\tan(15\pi/180)}{1-1\times\tan(15\pi/180)}} \simeq 72$ m/s $\simeq 260$ km/h.

Remarques : En utilisant un repère associé aux coordonnées sphériques ($\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\phi$), on arrive plus rapidement à la solution. En effet, les projections de l'équation du mouvement donnent un système d'équations découplées pour les inconnues F_f et N.



Ceci est dû au fait suivant : la voiture est en réalité contrainte à rester sur un cône de révolution d'axe vertical, ouvert vers le haut, avec un demi-angle au sommet égal à $\theta = \pi/2-\alpha$. Dans ce cas, les coordonnées sphériques sont particulièrement bien adaptées, car la surface du cône est simplement décrite par la condition "θ = constante" (sans conditions sur r et ϕ).
L'accélération en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\vec{a} = (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{e}_\theta+(r\ddot{\phi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta+2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\hat{e}_\phi.$$

Les contraintes sont : r = constante = $R/\cos\alpha$, θ = constante = $\pi/2-\alpha$ et $\dot{\phi}$ = constante = v/R donc l'accélération devient :

$$\vec{a} = -\frac{R}{\cos\alpha}\frac{v^2}{R^2}\cos^2\alpha\hat{e}_r - \frac{R}{\cos\alpha}\frac{v^2}{R^2}\cos\alpha\sin\alpha\hat{e}_\theta = -\frac{v^2}{R}\left(\cos\alpha\,\hat{e}_r+\sin\alpha\,\hat{e}_\theta\right).$$

Projection sur les axes de la deuxième loi de Newton :

$$\text{sur } \hat{e}_r : \quad -mg\sin\alpha - F_f = -m\frac{v^2}{R}\cos\alpha.$$

$$\text{sur } \hat{e}_\theta : \quad +mg\cos\alpha - N = -m\frac{v^2}{R}\sin\alpha.$$

Ceci est équivalent aux équations (5) et (6).

2 La feuille d'exercices

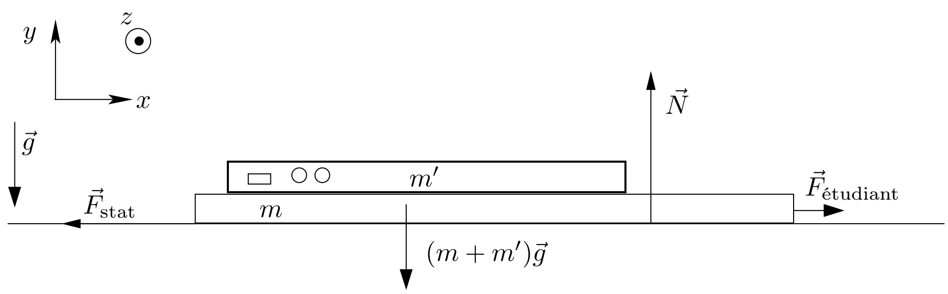
a) On décrit la situation dans le référentiel de la table. On choisit un repère fixe avec l'axe x horizontal dans la direction de la force exercée par l'étudiant et un axe y vertical vers le haut. Lorsque la force $\vec{F}_{\text{etudiant}}$ est trop petite pour mettre la feuille en mouvement, les forces qui s'appliquent sur le système *feuille+téléphone* sont

— son poids $(m+m')\vec{g}$, où $\vec{g} = -g\hat{e}_y$,

— la force de soutien de la table $\vec{N} = N\hat{e}_y$,

— la force horizontale $\vec{F}_{\text{etudiant}} = F_{\text{etudiant}}\hat{e}_x$,

— la force de frottement statique exercée par la table $\vec{F}_{\text{stat}} = -F_{\text{stat}}\hat{e}_x$, horizontale et de direction opposée à $\vec{F}_{\text{etudiant}}$.



Rappel : le système *feuille+téléphone* est traité ici comme un point matériel et on ne considère donc que les forces appliquées par l'extérieur du système sur ce "point". Les forces internes à ce point (par exemple les forces de frottements entre la feuille et le téléphone) n'interviennent pas.

Le système est à l'équilibre, la deuxième loi de Newton s'écrit

$$(m+m')\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{etudiant}} + \vec{F}_{\text{stat}} = \vec{0}.$$

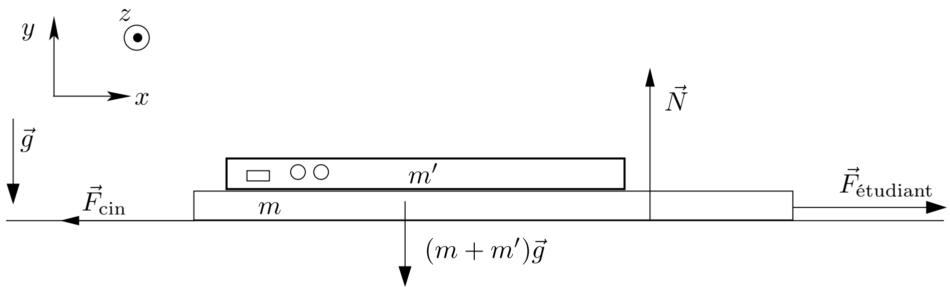
En projection sur l'axe vertical y, on a $N = (m+m')g$.

En projection sur l'axe horizontal x, on a $F_{\text{stat}} = F_{\text{etudiant}}$, qui est vérifiée tant que la valeur maximale de la norme de la force de frottement, $F^{max}_{\text{stat}} = \mu_s|\vec{N}|$, n'est pas atteinte. Donc, pour que le système *feuille+téléphone* ne bouge pas :

$$|\vec{F}_{\text{etudiant}}| < F^{max}_{\text{stat}} = \mu_s|\vec{N}| = \mu_s(m+m')g.$$

Si $|\vec{F}_{\text{etudiant}}|$ est plus grand que cette valeur limite, le système feuille+téléphone se met en mouvement.

b) Lorsque la force $|\vec{F}_{\text{etudiant}}|$ est plus grande que la valeur limite $\mu_s(m+m')g$, le système feuille+téléphone se met en mouvement. Cependant si la force $\vec{F}_{\text{etudiant}}$ est trop faible pour que la feuille glisse sous le téléphone, ce dernier reste sur la feuille en tout temps et on peut étudier le système *feuille+téléphone* en mouvement. Lorsque le système *feuille+téléphone* est en mouvement, la force de frottement statique est remplacée par une force de frottement cinétique $\vec{F}_{\text{cin}}$. Elle est exercée par la table et est horizontale et de direction opposée à $\vec{F}_{\text{etudiant}}$.

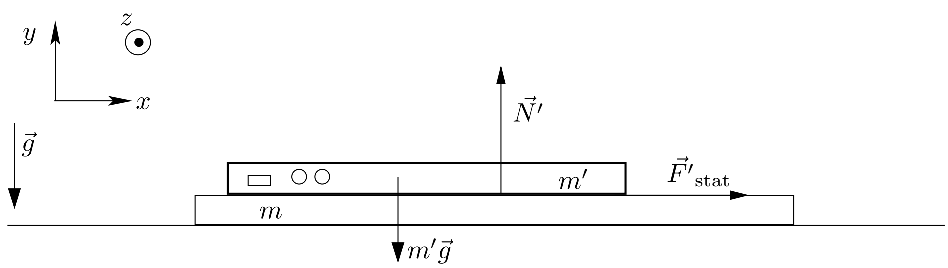


Considérons maintenant les forces qui s'appliquent sur le téléphone :

— son poids $m'\vec{g}$,

— la force de soutien exercée par la feuille $\vec{N}'$,

— la force de frottement exercée par la feuille $\vec{F}'_{\text{stat}}$. Cette force est horizontale dans une direction qui empêche le téléphone de glisser sur la feuille ; comme le téléphone pourrait glisser vers la gauche (vers les x négatifs), la force de frottement statique est dirigée vers la droite (vers les x positifs).



Considérons les projections selon x de la deuxième équation de Newton pour le téléphone, ainsi que pour le système *feuille+téléphone* (les projections selon y ne servent qu'à déterminer les valeurs de forces de soutien $\vec{N}$ et $\vec{N}'$ et sont évidentes).

— Pour le téléphone : $F'_{\text{stat}} = m'\ddot{x}'$.

— Pour le système feuille+téléphone : $F_{\text{etudiant}} - F_{\text{cin}} = (m+m')\ddot{x}$.

Dans la situation où le téléphone ne bouge pas par rapport à la feuille, on a $\ddot{x} = \ddot{x}'$. En combinant les deux équations précédentes, on obtient

$$F_{\text{etudiant}} = F_{\text{cin}} + (m+m')\frac{F'_{\text{stat}}}{m'}. \tag{11}$$

Ceci est vrai tant que la force F'_{stat} ne dépasse pas la valeur limite $F'^{max}_{\text{stat}} = \mu'_s|\vec{N}'| = \mu'_s m' g$, faute de quoi le téléphone se mettra en mouvement par rapport à la feuille. La condition pour que la feuille glisse sous le téléphone s'écrit donc

$$\begin{aligned} F_{\text{etudiant}} &> F_{\text{cin}} + \frac{m+m'}{m'}\mu'_s m' g \\ &= (\mu_c + \mu'_s)(m+m')g, \end{aligned}$$

où l'on a introduit $F_{\text{cin}} = \mu_c(m+m')g$.

Cependant pour que la feuille glisse sous le téléphone, il faut également exiger que $F_{\text{etudiant}} > \mu_s(m+m')g$ pour mettre en mouvement la feuille (résultat du point a)). Si ce n'est pas le cas, la condition trouvée au point a) n'est pas satisfaite et tout restera immobile. Finalement, la condition pour que la feuille glisse sous le téléphone est donc

$$F_{\text{etudiant}} > \max\left[\mu_s, (\mu_c + \mu'_s)\right](m+m')g. \tag{12}$$

3 Masse dans un tube en rotation

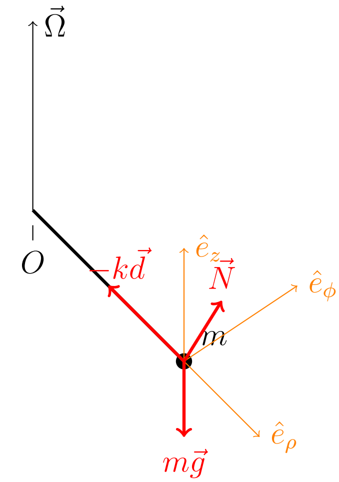
a) Le tube exerce sur la masse une force de contrainte, l'obligeant à ne bouger qu'à l'intérieur du tube, selon $\hat{e}_\rho$.

— Système : masse m

— Coordonnées cylindriques : $(\hat{e}_\rho,\, \hat{e}_\phi,\, \hat{e}_z)$

— Forces : poids, force élastique, réaction du tube (contrainte)

— Newton : $m\vec{g} + (-k\vec{d}) + \vec{S} = m\vec{a}$.



En projection selon les coordonnées cylindriques :

$$\left\{\begin{array}{ccc} -k\rho & = & ma_\rho \\ N_\phi & = & ma_\phi \\ -mg + N_z & = & ma_z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} -k\rho & = & m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \\ N_\phi & = & m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \\ -mg + N_z & = & m\ddot{z} \end{array}\right. \tag{13}$$

Comme $\dot{\phi} = \Omega = \text{cte}$, $\ddot{\phi} = 0$. De plus, $\ddot{z} = 0$. On obtient donc l'équation du mouvement de la masse m est donnée par :

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} -k\rho & = & m(\ddot{\rho} - \rho\Omega^2) \\ N_\phi & = & 2m\dot{\rho}\Omega \\ -mg + N_z & = & 0 \end{array}\right. \tag{14}$$

d'où l'on tire l'équation du mouvement pour la masse m :

$$\ddot{\rho} = -\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)\rho \quad \Rightarrow \quad \ddot{\rho} + \omega^2\rho = 0\,. \tag{15}$$

Dans le cas où le tube ne tourne pas ($\vec{\Omega} = \vec{0}$), l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\rho} + \frac{k}{m}\rho = 0\,,$$

qui est l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation $\sqrt{k/m}$.

b)
- Si $\Omega^2 < \frac{k}{m}$, la masse m effectue une oscillation harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2}$.
- Si $\Omega^2 = \frac{k}{m}$, $\ddot{\rho} = 0$: la masse n'est pas accélérée par rapport au tube, et a donc une vitesse constante (éventuellement immobile, comme cas particulier).
- Si $\Omega^2 > \frac{k}{m}$, la masse m s'échappera du tube, sans oscillation (sauf dans un cas très particulier, dépendant des conditions initiales).