Chapitre 3: Suites réelles

3.1 Définition et propriétés élémentaires

Def: Une suite réelle est une fonction $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
On écrit $a_n = a(n)$ pour un terme de la suite.
On écrit $(a_n)_{n\geq 0}$ ou (a_n) pour désigner la suite elle-même

Exemples:

- Suite harmonique $(x_n)_{n\geq 1}$ donnée par $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- Suite harmonique alternée $(x_n)_{n\geq 1}$ donnée par $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

on a $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{-1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = \frac{-1}{4}$, etc.

- Suite constante $(x_n)_{n\geq 0}$ donnée par $x_n = 7$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- Suite des nombres premiers: x_n est le n-ième nombre premier.

on a $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$, $x_5 = 11$ etc

Def: Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite. On dit que (x_n) est :

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \geq x_n$
- strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} > x_n$
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \leq x_n$
- strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} < x_n$
- (strictement) monotone si elle est . soit (strictement) croissante,
  . soit (strictement) décroissante.
- majorée si $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq c$
- minorée si $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq c$

- bornée si elle est majorée <u>et</u> minorée.

<u>Prop</u> : Une suite est bornée ssi $\exists c > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq c$.

<u>Exemple</u> : Prenons (x_n) définie par $x_n = \frac{(-1)^n}{1+n}$.

On a $|x_n| = \frac{1}{1+n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc (x_n) est bornée (prendre $c = 1$ dans la proposition ci-dessus).

3.2 Limite de suite

<u>Def</u> : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ℓ est la limite de (x_n) ou que (x_n) converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |x_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$ et on dit que (x_n) converge / est convergente.

<u>Exemple</u> : Soit (x_n) définie par $x_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

On veut $\frac{1}{N^2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq N^2 \Leftrightarrow N \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$, $|x_n - 1| \leq \varepsilon$

On a $|x_n - 1| = \frac{1}{n^2}$. On pose $\boxed{N \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$ et alors $\forall n \geq N$

on a $|x_n - 1| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} \leq \varepsilon$. Cela conclut la preuve ∎

<u>Prop</u> : Si une suite converge alors sa limite est unique. (admis)

Prop: Tout suite convergente est bornée.

Preuve: Soit (a_n) une suite convergente, soit ℓ sa limite.

Prenons, dans la définition de la limite $\varepsilon = 1$. On a

$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \quad |a_n - \ell| \leq 1$

$\forall n \geq N, \quad |a_n| = |a_n + \ell - \ell| \underset{\text{Ineg. Triangulaire}}{\leq} |a_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|$

Soit $c = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_N|, \ 1 + |\ell|\}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \ |a_n| \leq c$ donc la suite est bornée ∎

Notation : $\inf(x_n) := \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

$\sup(x_n) := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

3.3 Suites divergentes

Def: Si (x_n) ne converge pas, on dit que (x_n) diverge / est divergente.

c'est-à-dire : $\forall \ell \in \mathbb{R}, \ \exists \varepsilon > 0, \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq N, \ |x_n - \ell| > \varepsilon$.

Limites infinies:

Def: Soit (x_n) une suite. On dit que :

- (x_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \quad x_n \geq M$$

on note $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$

- (x_n) tend vers $-\infty$ si : ($x_n \leq M$ donnerait la même chose)

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \quad x_n \leq -M$$

on note $\lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty$

3.4 Opérations sur les limites

Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$
alors on a :

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha a + \beta b$

(ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

(iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ si $\begin{cases} b \neq 0 \\ b_n \neq 0 , \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ (ou à partir d'un certain rang)}. \end{cases}$

Preuve pour (i) (les autres : exercice) : On suppose $\alpha, \beta \neq 0$;

On a :

inégalité triangulaire .

$$|\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha a + \beta b)| \leq |\alpha| \cdot |a_n - a| + |\beta| \cdot |b_n - b|$$

Soit $\varepsilon > 0$.

On a que $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_1$, $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_2$, $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$

On pose $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$.

On a $\forall n \geq N_3$,

$$|\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha a + \beta b)| \leq |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Cela montre $\lim_{n\to+\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha a + \beta b$ ∎

Exemple :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{\lim_{n\to+\infty} 2 + 3/n}{\lim_{n\to+\infty} 3 - 1/n} = \frac{\overbrace{\lim_{n\to+\infty} 2}^{2} + 3\overbrace{\lim_{n\to\infty} 1/n}^{0}}{\underbrace{\lim_{n\to+\infty} 3}_{3} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} 1/n}_{0}}$$

(or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ car, étant donné $\varepsilon > 0$, prenons $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ alors $\forall n \geq N$, $\left|\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$.)

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2}{3}$ la limite est non nulle donc (iii) s'applique bien.

- Cette technique se généralise à tout ratio de polynôme.

fin cours 17/10