RAQ

17/10

- $G \curvearrowright X$ il existe φ un morphisme

$$\varphi : G \longrightarrow Bij(X)$$

$X' = \mathcal{F}(X,Y)$ on défini une "action"

de G sur $\mathcal{F}(X,Y)$ en posant pour

$g \in G$ et $f : x \in X \longrightarrow f(x) \in Y$

$$f|g : x \longrightarrow f(\varphi(g)(x))$$

on veut mq

$(f,g) \longrightarrow f|g$ defini une action

a droite.

<u>1ere Methode</u> : en definissant un antimorphisme

$$\tilde{\varphi} : G \longrightarrow Bij(\mathcal{F}(X,Y))$$

On pose $\tilde{\varphi}(g) : f \longmapsto f_{|g} : x \to f(\varphi(g)(x))$

$\tilde{\varphi}(g)$ est une bijection de $\mathcal{F}(X,Y)$ vers $\mathcal{F}(X,Y)$

Pour cela il suffit de fournir sa réciproque

- la réciproque est $\tilde{\varphi}(g^{-1})$

on calcule

$$\tilde{\varphi}(g^{-1}) \circ \tilde{\varphi}(g)(f)$$

$$\tilde{\varphi}(g^{-1})\left(\tilde{\varphi}(g)(f)\right)$$

On veut mq $= f$

$\Rightarrow \forall g \quad \tilde{\varphi}(g^{-1}) \circ \tilde{\varphi}(g) = Id_{\mathcal{F}(X,Y)}$

et on veut aussi mq

$\tilde{\varphi}(g) \circ \tilde{\varphi}(g^{-1})(f) = f.$ $\Leftarrow$ il suffit d'échanger g et g^{-1} dans

$$\tilde{\varphi}(g^{-1}) \circ \tilde{\varphi}(g)(f) = f$$

Soit $x \in X$

$$\tilde{\varphi}(g^{-1})\left(\tilde{\varphi}(g)(f)(x)\right) \overset{?}{=} f(x)$$

$F := \tilde{\varphi}(g)(f)$ et on calcule

$$\tilde{\varphi}(g^{-1})(F(x)) = F(\varphi(g^{-1})(x))$$

$$
\begin{aligned}
F(\varphi(g^{-1})(x)) &= \tilde{\varphi}(g)(f)(\underbrace{\varphi(g^{-1})(x)}) \\
&= \tilde{\varphi}(g)(f)(x') \\
&= f(\varphi(g)(x')) \\
&= f(\varphi(g)(\varphi(g^{-1})(x))) \\
&= f(\varphi(g)\circ\varphi(g^{-1})(x)) = f(\varphi(g\cdot g^{-1})(x)) \\
&= f(\mathrm{Id}_X(x)) = f(x)
\end{aligned}
$$

On a mq $\tilde{\varphi} : g \to \tilde{\varphi}(g) \in \mathrm{Bij}(\mathcal{F}(X,Y))$

On doit mq $\tilde{\varphi}(g.g') = \tilde{\varphi}(g') \circ \tilde{\varphi}(g)$

On mq pour toute $f : X \to Y$

$$\tilde{\varphi}(g.g')(f) = \tilde{\varphi}(g') \circ \tilde{\varphi}(g)(f)$$

$$\underline{\hspace{4em}}(x) = \underline{\hspace{6em}}(x) \text{ ?}$$

$$\tilde{\varphi}(g\cdot g')(f)(x) = f(\varphi(g\cdot g')(x))$$

$$= f(\varphi(g)\circ\varphi(g')(x))$$

$$= f(\varphi(g)(\underbrace{\varphi(g')(x)}_{x'}))$$

$$= f(\varphi(g)(x')) = \underbrace{\tilde{\varphi}(g)(f)}_{F}(x')$$

$$(x')$$

$$F(x') = F(\varphi(g')(x)) = \tilde{\varphi}(g')(F)(x)$$

$$F = \tilde{\varphi}(g)(f) \qquad = \tilde{\varphi}(g')(\tilde{\varphi}(g)(f))(x)$$

$$= \tilde{\varphi}(g')\left(\tilde{\varphi}(g)(f)\right)(x)$$

$\forall x$

$$\tilde{\varphi}(g.g')(f)(x) = \left(\tilde{\varphi}(g') \circ \tilde{\varphi}(g)\right)(f)(x)$$

$$\Longrightarrow \tilde{\varphi}(g.g')(f) = \tilde{\varphi}(g') \circ \tilde{\varphi}(g)(f) \quad /$$

$$\tilde{\varphi}(g \cdot g') = \tilde{\varphi}(g') \circ \tilde{\varphi}(g)$$

2^{eme} Methode: Se donner une action à dte

$$\iff \bullet|\bullet : \mathcal{F}(X,Y) \times G \longrightarrow \mathcal{F}(X,Y)$$
$$(f,g) \longrightarrow f|g$$

- tq $f|e_G = f$
- $f|g.g' = (f|g)|g'$

Dans notre cas l'action $f|_g$ est donnée

par $f|_g : x \longrightarrow f(\varphi(g)(x)) = f(g \odot x)$

avec $e_G \odot x = x$ et $(g.g') \odot x = g \odot (g' \odot x)$

$\odot : G \times X \longrightarrow X$

$(g, x) \longrightarrow \varphi(g)(x) = g \odot x$

$$f|_{e_G} = f$$

$$\forall x \in X \quad f|_{e_G}(x) = f(e_G \odot x) = f(x)$$

$$f|_{g \cdot g'} = (f|_g)|_{g'} \quad ?$$

$$\forall x \in X \quad f|_{g \cdot g'}(x) = (f|_g)|_{g'}(x) \quad ?$$

$$f|_{g\cdot g'}(x) = f((g\cdot g')\odot x)$$

$$= f(g\odot(g'\odot x)) = F(x')$$

$$F :: x'' \to f(g\odot x'') = f|_g(x'') \quad x' = g'\odot x$$

$$= F(g'\odot x) = F|_{g'}(x)$$

$$F|_{g'}(x) = (f|_g)|_{g'}(x) \qquad f|_{g\cdot g'} = (f|_g)|_{g'}$$

Par l'exo 6 ✓ cela implique que
appliqué à "X" $= \mathcal{F}(X,Y)$

$$\mathcal{F}(X,Y) \times G \longrightarrow \mathcal{F}(X,Y)$$
$$(f,g) \longrightarrow f|g$$

défini une action à droite $\mathcal{F}(X,Y) \circlearrowleft G$