Analyse I – Série 5

Echauffement. (Infimum, Supremum)

Soit $a_n = \dfrac{5n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Soit $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Calculer

a) $\operatorname{Inf} A$ b) $\operatorname{Sup} A$

Sol.:

a) *Afin de trouver* $\operatorname{Inf} A$*, il suffit de remarquer que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante. En effet,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{5\,(n+1)}{2\,(n+1)+1} - \frac{5n}{2n+1} = \frac{(5n+5)\,(2n+1) - 5n\,(2n+3)}{(2n+1)\,(2n+3)} \\ &= \frac{5}{(2n+1)\,(2n+3)} \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Inf} A = \min a_n = a_0 = 0$.

b) *Afin de trouver* $\operatorname{Sup} A$*, nous pouvons remarquer que*

$$a_n = \frac{\frac{5}{2}\,(2n+1) - \frac{5}{2}}{2n+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2\,(2n+1)} \leq \frac{5}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et donc $a = \frac{5}{2}$ *est un majorant de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Il reste à montrer que* $a = \frac{5}{2}$ *est le plus petit des majorants, c.-à.-d.* $\forall\, \varepsilon > 0$*, il faut trouver* n_0 *tel que* $a_{n_0} > a - \varepsilon$*. Donc il faut trouver* n_0 *tel que*

$$\frac{5}{2} - \frac{5}{2(2n_0+1)} > \frac{5}{2} - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon > \frac{5}{2(2n_0+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{5}\varepsilon > \frac{1}{2n_0+1} \quad \Leftrightarrow \quad 2n_0 + 1 > \frac{5}{2\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \quad n_0 > \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2\varepsilon} - 1\right).$$

Puisque le sous-ensemble des nombres naturels n'est pas majoré, on peut toujours trouver un tel $n_0 \in \mathbb{N}$*. Par exemple, on peut choisir*

$$n_0 = \max\left\{0, \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2\varepsilon} - 1\right)\right\rfloor + 1\right\}$$

où $\lfloor x \rfloor$ *désigne le plus grand nombre entier inférieur où égal à* x*. Alors pour tout* $n > n_0$ *on a l'inégalité* $a_n > a - \varepsilon$*, ce qui montre que*

$$\operatorname{Sup} A = \frac{5}{2}.$$

Exercice 1. (Définition de la limite)
Soit (u_n) une suite de réels positifs vérifiant $u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}$ pour tous $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Démontrer que (u_n) tend vers 0.

Sol. :
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_k$ tend vers 0, on peut trouver un entier K tel que $\frac{1}{K} \leq \varepsilon$. On en déduit que, pour tout entier n, on a $0 \leq u_n \leq \varepsilon + \frac{K}{n}$. Or, la suite $\left(\frac{K}{n}\right)_n$ tend vers 0, et on peut trouver un entier N tel que, pour $n \geq N$, on a $\frac{K}{n} \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout entier $n \geq N$, on a prouvé que

$$0 \leq u_n \leq 2\varepsilon$$

Cela montre que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 2. (Critères de convergence, cours)

(i) Montrer que toute suite convergente est bornée (sans regarder la preuve du cours !).
(ii) Soit (a_n) une suite. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ alors la suite est divergente.

Sol. :

(i) Vous pouvez maintenant regarder la preuve du cours.
(ii) (Démonstration par l'absurde). Supposons que la suite (a_n) est convergente, alors par (i) il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq c$. Soit $r > c$, alors si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq n_0$, $a_n \geq r$, en contradiction avec le fait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq c$.

Exercice 3. (Lois algébriques, cours)

Montrer que si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Sol. :

L'hypothèse $b \neq 0$ implique qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_1$, $|b_n - b| \leq \frac{1}{2}|b|$ et donc $\forall n \geq n_1$,

$$\frac{1}{|b_n|} = \frac{1}{|b + b_n - b|} \leq \frac{1}{||b| - |b_n - b||} \leq \frac{1}{|b| - |b|/2} = \frac{2}{|b|}.$$

On a

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \frac{|(a_n - a)b - (b_n - b)a|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|}|a_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|b_n - b|.$$

Or $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq n_1$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$\frac{2}{|b|}|a_n - a| \leq \frac{2}{\varepsilon} \qquad \frac{2|a|}{|b|^2}|b_n - b| \leq \frac{2}{\varepsilon},$$

et donc $\forall n \geq n_0$, $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| \leq \varepsilon$.

Exercice 4. (Propriétés algébriques de la limite)

Soit $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{3} + \dfrac{3}{a_n}\right)$

Sol.:

a) La suite est croissante et bornée et on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = \mathrm{Sup}\{a_1, a_2, \ldots\} = 3 \ .$$

On peut aussi utiliser les propriétés algébriques de la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1+\frac{2}{n}} = \frac{3}{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{3}{1+2\cdot 0} = 3 \ .$$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{3}$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{3} + \frac{3}{a_n}\right) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{3}{3} = 2$

Intermezzo.

Les informations suivantes seront utiles pour les exercices qui suivent :

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0\,,$ *pour tout $p > 0$.*
2) $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x\,,$ *pour tout $x \geq 0$.*
3) $1 + x \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x\,,$ *pour $-1 \leq x \leq 0$.*

Démonstration :

1) *Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n^p} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. On peut par exemple choisir*

$$n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \right\rfloor + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \ ,$$

car on trouve pour $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n_0^p} \leq \varepsilon \ .$$

2) *Pour $x \geq 0$ on a*

$$1 \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{1 + x + \frac{1}{4}x^2} = 1 + \frac{1}{2}x \ .$$

3) *Pour $-1 \leq x \leq 0$ on a* $0 \leq 1 + x \leq 1$ *et donc* $(1+x)^2 \leq 1 + x$ *. Donc*

$$1 + x \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{1 + x + \frac{1}{4}x^2} = 1 + \frac{1}{2}x \ .$$

Exercice 5. (Existence de limites)

Déterminer, si elle existe, la limite $n \to \infty$ de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec

a) $a_n = \dfrac{5n^2-3n+2}{3n^2+7}$ b) $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$ c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$

Indication: Pour c), on pourra utiliser (après l'avoir démontrée) l'inégalité suivante : $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}$ $\forall x \geq 0$,.

Sol.:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-3n+2}{3n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-3\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{7}{n^2}} = \frac{5-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3+7\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{5}{3}$$

b) On a

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} n^{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{12}}} = 0 \ ,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}} = 0 \ .$$

c) On a

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} \leq 1+\frac{1}{n^2} \qquad \overset{[Th2G]}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} = 1 \ ,$$

où [Th2G] dénote « par le théorème des deux gendarmes ». Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \ .$$

Remarque :
Nous allons voir plus tard que l'on peut « échanger » la racine et la limite, ce qui donne

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}{2n} = \frac{\sqrt{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

Exercice 6. (Propriétés des suites)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (a_n) est monotone ; trouver, s'il existe, le supremum et l'infimum de la suite et décider s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

a) $a_n = n^2-4n+1,\ n \in \mathbb{N}$ b) $a_n = \dfrac{n}{3n-1},\ n \in \mathbb{N}^*$ c) $a_n = \dfrac{n}{3n-1},\ n \in \mathbb{N}$

Sol.:

a) On a $a_n = (n-2)^2 - 3$ *. Calculons les premiers termes de la suite :*

$$a_0 = 1, \ \ a_1 = -2, \ \ a_2 = -3, \ \ a_3 = -2, \ \dots$$

La suite n'est donc pas monotone car par exemple $a_1 > a_2$ *et* $a_2 < a_3$*. Pour* $n \geq 2$*, on a par contre*

$$a_n = (n-2)^2 - 3 \leq (n-1)^2 - 3 = a_{n+1} \ ,$$

c.-à.-d. la suite est croissante pour $n \geq 2$*.*
Donc on a

$$\operatorname{Inf} a_n = \min a_n = -3 \ .$$

Pour $n \geq 2$ *on a*

$$a_{n+1} - a_n = (n-1)^2 - (n-2)^2 > 1,$$

alors la suite $\{a_n\}$ *croît plus vite que les nombres naturels, et donc* $\{a_n\}$ *n'est pas majoré. Ainsi* $\operatorname{Sup}(a_n)$ *et a fortiori* $\max(a_n)$ *n'existent pas.*

b) On a

$$a_n = \frac{n}{3n-1} = \frac{\frac{1}{3}(3n-1) + \frac{1}{3}}{3n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n-1)}$$

On procède ensuite comme dans l'exercice précédent pour montrer que la suite est décroissante :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{3(3(n+1)-1)} - \frac{1}{3(3n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{3n-1-(3n+2)}{(3n+2)(3n-1)}\right) \\ &= -\frac{1}{(3n+2)(3n-1)} < 0 \, \forall n \in \mathbb{N}^* \ . \end{aligned}$$

Il s'en suit que $\operatorname{Sup} a_n = \max a_n = a_1 = \frac{1}{2}$*. De plus on a vu que*

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n-1)} \ ,$$

donc (a_n) *est minorée par* $a = \frac{1}{3}$*. Pour montrer que* a *est le plus grand minorant de* (a_n)*, il faut montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $a_{n_0} < a + \varepsilon$*, où* $a = \frac{1}{3}$*. On écrit*

$$a_{n_0} < \frac{1}{3} + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n_0 - 1)} < \frac{1}{3} + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 3n_0 - 1 > \frac{1}{3\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n_0 > \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}.$$

En prenant n_0 *entier tel que*

$$n_0 > \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3} \ ,$$

on a

$$a_{n_0} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3\left(3\left(\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}\right) - 1\right)} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{3} + \varepsilon$$

et donc

$$\operatorname{Inf} a_n = \frac{1}{3} \ .$$

Notons encore que $\min (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *n'existe pas.*

c) Même question qu'en ii) sauf que l'on étudie ici $\{a_0 \cup (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$.
Comme $a_0 = 0$, *on a* $\min (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 = \min (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
De plus, la suite (a_n) *perd sa monotonie puisque* $a_0 < a_1$ *et* $a_1 > a_2$.
Enfin, l'on a toujours $\operatorname{Sup} a_n = \max a_n = a_1 = \frac{1}{2}$.

Exercice 7. (Calcul de limites)

Calculer la limite lorsque $n \to \infty$ de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec

a) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ b) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ c) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Indication : pour a), vous pouvez multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{n+2} + \sqrt{n}$ (c'est une astuce classique à maîtriser !).

Sol.:

a) On a

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$
$$= \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} \ ,$$

d'où $0 \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, *et par le théorème des deux gendarmes on obtient que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) On a

$$0 \leq a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)\cdots\left(\frac{n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \ ,$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ *par le théorème des deux gendarmes.*

c) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$ *on a*

$$\frac{2}{m} \leq 1 \ ,$$

et donc

$$0 \leq a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} \cdots \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \leq \frac{2}{n} \cdot 2 \ ,$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$ *avec le théorème des deux gendarmes.*

Exercice 8.(*) (Fonction exponentielle)

À partir de la limite $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (admise), calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Sol.: *Rappelons que* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. *Alors* *a)* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right) = e^2$.

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\right) = \frac{1}{e}$.

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 1$.

Exercice 9. (Croissance)

Pour chaque suite ci-dessous étudier sa croissance (c'est-à-dire, dire si elle est (strictement) croissante ou décroissante ou ni l'un ni l'autre). Pour les suites dépendant d'un paramètre, discuter des différents cas possibles.

a) $x_n = n^2+3n+2$
b) $x_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$
c) $x_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$
d) $x_n = r^n$ (suite géométrique de raison $r\in\mathbb{R}$)
e) $x_n = nr+b$ (suite arithmétique de raison $r\in\mathbb{R}$ avec $b\in\mathbb{R}$)
f) x_n définie par $x_0=1$ et $x_{n+1}=\frac{x_n-3}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
g) x_n définie par $x_0=0$ et $x_{n+1}=\frac{x_n^2+2}{2\sqrt{2}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Sol.:

a) Cette suite est strictement croissante. En effet $x_n=(n+1)(n+2)$ et donc $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+3}{n+1}>1$.

b) Cette suite n'est ni croissante ni décroissante.

c) On regarde $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}\frac{2^{n+1}}{3^n}=\frac{3}{2}>1$. Donc cette suite est strictement croissante.

d) Si $r<0$ alors la suite n'est ni croissante ni décroissante. Si $r=0$ la suite est constante. Si $0<r<1$ alors la suite est strictement décroissante. Si $r=1$ la suite est constante. Si $r>1$ alors la suite est strictement croissante.

e) Si $r=0$ alors la suite est constante. Si $r<0$ la suite est strictement décroissante et si $r>0$ alors elle est strictement croissante.

f) Commençons par observer que $x_n>-3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En effet, c'est vrai pour $n=0$ car $x_0=1$. Supposons l'assertion vraie pour n et montrons-la pour $n+1$. On a que $x_{n+1}=\frac{x_n-3}{2}>\frac{-3-3}{2}=-3$. Étudions à présent la différence $x_{n+1}-x_n$. Un calcul nous donne

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n-3}{2}-\frac{2x_n}{2}=-\frac{x_n+3}{2}$$

Comme $x_n>-3$ on a que $x_n+3>0$ et par conséquent $x_{n+1}-x_n<0$. Donc cette suite est strictement décroissante.

g) On calcule $x_{n+1}-x_n$ et on trouve $\frac{x_n^2+2}{2\sqrt{2}}-x_n=\frac{x_n^2-2\sqrt{2}x_n+2}{2\sqrt{2}}=\frac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}\geq 0$. Ceci montre que la suite est croissante. On peut montrer de plus que $x_n<\sqrt{2}$ (par récurrence) et donc $x_{n+1}-x_n>0$ siginifiant que la suite est strictement croissante.

Exercice 10. (V/F : suites)

Répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie. Soit (a_n) une suite numérique.

Q1 : Si (a_n) est bornée, alors (a_n) converge.
FAUX : $a_n = (-1)^n$ est un contre-exemple.

Q2 : Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty}(a_n \sin(n)) = 0$.
VRAI : Comme $|\sin(n)| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq |a_n \sin(n)| = |a_n| \cdot |\sin(n)| \leq |a_n|,$$

ou

$$-|a_n| \leq a_n \sin(n) \leq |a_n|. \tag{1}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la suite des valeurs absolues $(|a_n|)$ converge aussi vers 0. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors par la convergence de (a_n) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

pour tout $n \geq n_0$, ce qui établit que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ également. Par le théorème des deux gendarmes appliqué à (1) on conclut alors que $\lim_{n\to\infty}(a_n \sin(n)) = 0$.

Q3 : Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors (a_n) diverge.
FAUX : $a_n = 1$ est un contre-exemple ($a_n = 1/n$ en est un autre).

Q4 : Si (a_n) converge, alors il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
VRAI : Comme (a_n) converge, elle est bornée. Ainsi $\mathrm{Sup}A < \infty$ où $A = \{|a_0|, |a_1|, \ldots\}$, si bien que l'énoncé est vrai en prenant par exemple $\varepsilon = 1 + \mathrm{Sup}A$.

Q5 : Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $|a_n - a| \leq \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
VRAI Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ alors $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$. Ainsi la suite (b_n) définie par $b_n = a_n - a$ est bornée. En appliquant le raisonnement de la question précédente à la suite (b_n), on a le résultat voulu.

Exercice 11. (Suites adjacentes) Considérons les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

Montrer que (u_n) est croissante, que (v_n) est décroissante et que $(u_n - v_n)$ tend vers 0. En déduire que la suite (u_n) converge (on pourra faire appel à un théorème du cours). (Nous verrons plus tard que $\lim_{n\to\infty} u_n = \exp(1)$.)

Solution.
La suite (u_n) est (strictement) croissante car $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)! > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La suite (v_n) est (strictement) décroissante car

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par ailleurs $v_n - u_n = 1/(nn!)$ donc $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to\infty}(1/n) \cdot \lim_{n\to\infty}(1/n!) = 0$. Par le théorème des suites adjacentes, il s'ensuit que (u_n) converge.