Corrigé du Minitest 1

Le trampoline – (17 points)

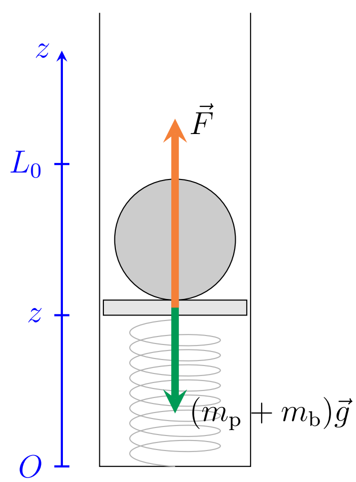
a) Pour répondre à la question, on applique la méthode de résolution.

Système : Le plateau et la bille considérés comme un point matériel de masse $m_\mathrm{b} + m_\mathrm{p}$

Référentiel : le laboratoire

Variables de position : repère cartésien avec axe z vertical, dirigé vers le haut, et dont l'origine est au pied du ressort. On notera z la position du système *plateau+bille*.
Remarque : on aurait aussi pu choisir un axe orienté vers le bas.

Forces extérieures :
— le poids de la balle et du plateau $\vec{P} = -(m_\mathrm{b} + m_\mathrm{p})g\ \hat{e}_z$,
— la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(z - L_0)\ \hat{e}_z$. $\boxed{\text{1 point pour d'expression de la force de rappel}}_{\mathrm{A}}$
Remarque : les forces entre le plateau et la bille sont internes au système, et n'entrent donc pas en considération à ce stade de l'analyse.



$\boxed{\text{1 point pour indiquer correctement les deux forces sur le dessin}}_{\mathrm{B}}$
Remarque : si le dessin ne représente qu'un unique point au lieu du plateau et du ressort, le dessin est tout à fait correct (on ne cherche pas à préciser le point d'application des forces puisque c'est un point matériel).

Loi applicable à la situation : seconde loi de Newton, $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$.

Equation du mouvement : si $m = m_\mathrm{b} + m_\mathrm{p}$ alors (projection sur l'axe z)

$$m\ddot{z} = -k(z - L_0) - mg\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{C}} \tag{1}$$

b) Le système est à sa position d'équilibre, z_eq, quand son accélération est nulle ($\ddot{z} = 0$), et donc que la somme des forces est nulle.

$$-k(z_\mathrm{eq} - L_0) - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_\mathrm{eq} = L_0 - \frac{mg}{k}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{D}} \tag{2}$$

c) On cherche la fonction horaire qui est solution de l'équation du mouvement, Eq. (1). Celle-ci peut se réécrire comme

$$m\ddot{z} = -k(z + \frac{mg}{k} - L_0) \tag{3}$$

On effectue le changement de variable

$\boxed{\text{1 point pour le changement de variable ou si l'origine du repère a été placée à la position d'équilibre}}_{\mathrm{E}}$

$$\begin{aligned} X &= z + \frac{mg}{k} - L_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = X - \frac{mg}{k} + L_0 & (4)\\ \dot{X} &= \dot{z} & (5)\\ \ddot{X} &= \ddot{z} & (6)\end{aligned}$$

L'équation (3) devient alors

$$m\ddot{X} = -kX\,, \tag{7}$$

dont la solution est

$$X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m_{\mathrm{b}} + m_{\mathrm{p}}}}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{F}} \tag{8}$$

Les conditions initiales sont $z_0 = z(t=0) = L_0 - \Delta L$ et $\dot{z}_0 = 0$, donc

$$X_0 = z_0 + \frac{mg}{k} - L_0 = \frac{mg}{k} - \Delta L = \frac{g}{\omega^2} - \Delta L \qquad \text{et} \qquad \dot{X}_0 = 0\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{G}} \tag{9}$$

L'équation horaire, Eq. (8), devient alors la solution particulière

$$X(t) = \left(\frac{g}{\omega^2} - \Delta L\right)\cos(\omega t)\,, \tag{10}$$

et donc, en utilisant l'équation (4),

$$z(t) = \left(\frac{g}{\omega^2} - \Delta L\right)\cos(\omega t) - \frac{g}{\omega^2} + L_0\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{H}} \tag{11}$$

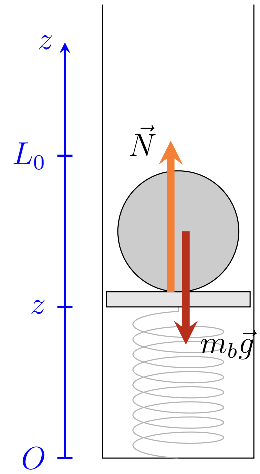
La vitesse est elle donnée par

$$v(t) = \dot{z}(t) = -\omega\left(\frac{g}{\omega^2} - \Delta L\right)\sin(\omega t)\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{I}} \tag{12}$$

d) La période du mouvement est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\mathrm{b}} + m_{\mathrm{p}}}{k}}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{J}} \tag{13}$$

e) Pour déterminer les conditions de décollement il faut analyser le **système** de la bille seule. On garde le même **référentiel** et le même **repère** que ci-dessus.



Les **forces** qui s'appliquent à la bille sont

— le poids de la bille $\vec{P}_{\mathrm{b}} = -m_{\mathrm{b}} g \; \hat{e}_z$,

— la force de liaison appliquée par le plateau $\vec{N} = N_z \; \hat{e}_z$.

$\boxed{\text{1 point pour } \vec{N} \text{ et pour ne pas inclure la force du ressort dans la liste}}_{\mathrm{K}}$

La bille décolle lorsque la force de liaison $\vec{N}$ du plateau sur la bille s'annule : $N_z = 0$ $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{L}}$

L'équation du mouvement de la bille lorsqu'elle est en contact avec le plateau est

$$m_{\mathrm{b}} \ddot{z}_{\mathrm{b}} = N_z - m_{\mathrm{b}} g \qquad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{M}} \tag{14}$$

Tant que le plateau et la bille se déplacent ensemble ils ont la même accélération, $\ddot{z}_{\mathrm{b}} = \ddot{z}_{\mathrm{p}} = \ddot{z}(t)$, $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{N}}$ et on peut donc écrire l'équation (14) comme

$$N_z = m_{\mathrm{b}} \ddot{z} + m_{\mathrm{b}} g \,. \tag{15}$$

En substituant l'expression de $\ddot{z}$ de l'Eq.(1) and l'Eq. (15), on trouve que

$$N_z = m_{\mathrm{b}}(\ddot{z} + g) = m_{\mathrm{b}} \left(-\frac{k}{m_{\mathrm{b}} + m_{\mathrm{p}}} (z - L_0) - g + g \right) = -m_{\mathrm{b}} \omega^2 \, (z - L_0) \ , \qquad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{O}} \tag{16}$$

qui s'annule quand $z = L_0$. La condition pour que le décollement ait lieu est donc que le plateau atteigne la position L_0, et donc que $z \geq L_0$. $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{P}}$

f) La fonction $z(t)$ (Eq. (11)) atteint son premier extremum lorsque $\cos \omega t = -1$, donc la condition de décollement est

$$\max(z(t)) \;>\; L_0 \tag{17}$$

$$\Delta L - g/\omega^2 + L_0 - g/\omega^2 \;>\; L_0 \tag{18}$$

$$\Delta L \;>\; 2 \, \frac{g}{\omega^2} = 2 \, \frac{(m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{b}}) \, g}{k} \qquad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{Q}} \tag{19}$$

Sur la figure 1, on peut observer la limite $L_0 - 2g/\omega^2$ qui correspond à la position initiale limite pour avoir un décollement.

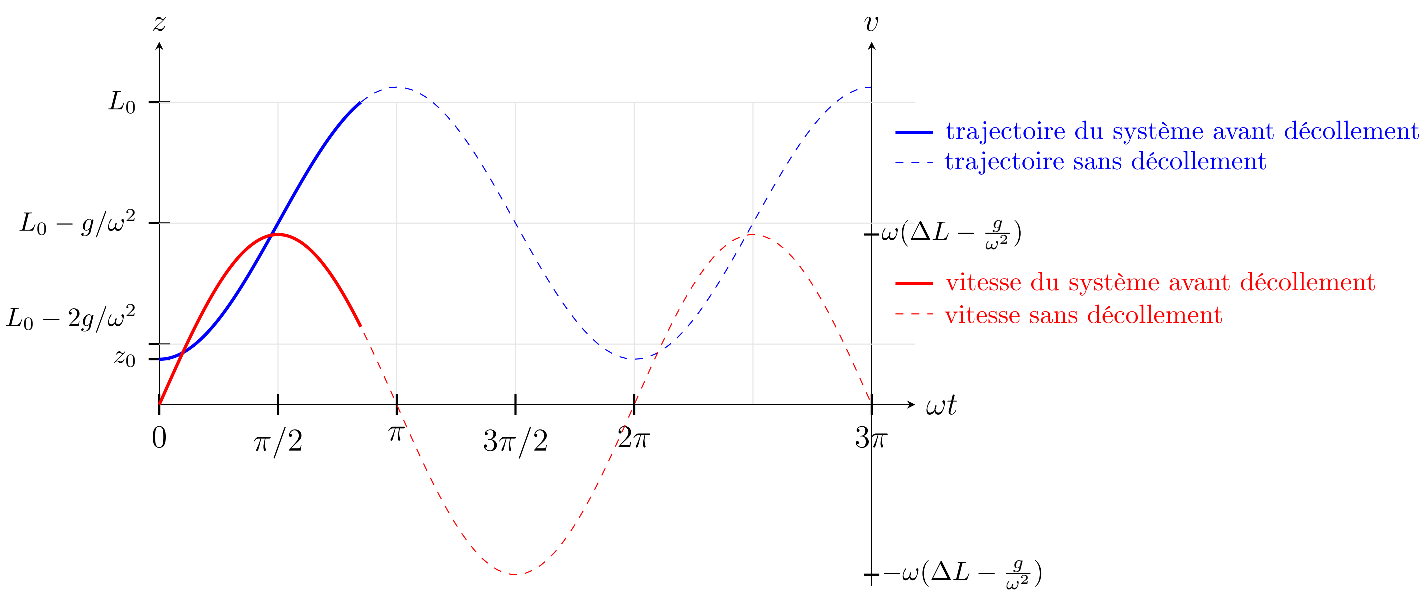


FIGURE 1 – Position et vitesse du plateau en fonction du temps. Les lignes pointillées indique l'évolution du système plateau+bille dans le cas où le décollement ne serait pas possible (e.g. bille collée au plateau).