# Série 06 : Energie et équilibre

## Questions conceptuelles

a) Pourquoi est-il plus aisé de gravir une pente en zigzag que tout droit ?

b) Vous soulevez une caisse depuis le sol pour la poser sur une table. Comparer le travail de la force que vous exercez sur la caisse avec celui du poids de la caisse. Le travail de la force que vous exercez dépend-il :

   (i) de la trajectoire suivie (directe ou au contraire compliquée) ?

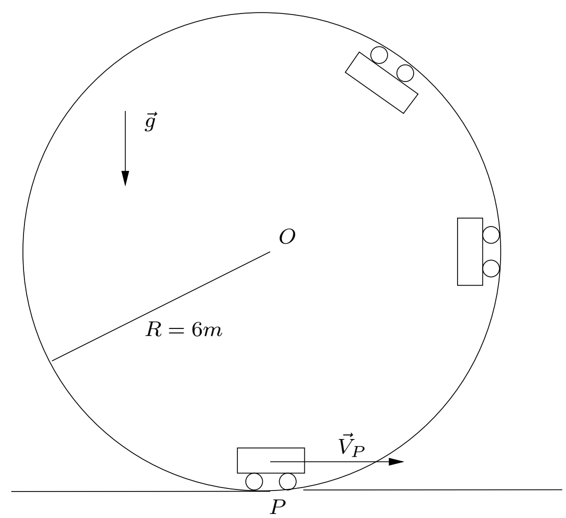
   (ii) du temps que ça prend ?

   (iii) de la hauteur de la table ?

   (iv) du poids de la caisse ?

## 1 Loop the loop

Un cascadeur tente de faire le tour d'un circuit vertical en forme de cercle de rayon $R$ au volant de sa voiture de poids $mg$. Il entre dans le circuit au point $P$ avec une vitesse $\vec{V}_P$ et on suppose qu'il se laisse ensuite tourner autour du circuit en roue libre sans appuyer ni sur l'accélérateur ni sur le frein. Il n'y a pas de frottement.




a) Ecrire les équations du mouvement de la voiture sur le cercle.

b) Exprimer l'énergie mécanique de la voiture en tout point de la piste circulaire, et montrer que l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement.

c) Calculer la force de réaction du circuit sur la voiture en fonction de la position de la voiture sur la piste circulaire et de sa vitesse d'entrée $V_P$.

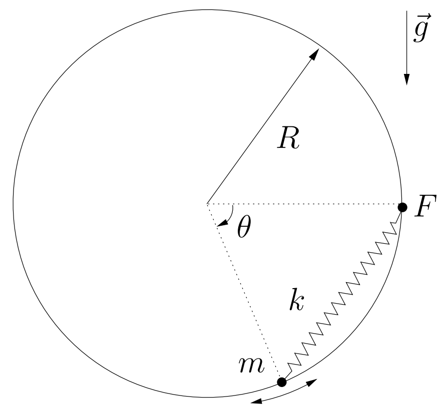
d) Quelle est la vitesse minimale que doit avoir la voiture au point d'entrée $P$ de la boucle pour réussir le looping sans décoller ? Application numérique : $R = 6\ m$.

## 2 Saut à l'élastique

Une étudiante de masse $m$ attachée à un gros élastique de constante $k$ saute sans vitesse initiale du bord d'un pont à une hauteur $h$ au-dessus d'une rivière. L'élastique empêche tout juste l'étudiante de se mouiller dans la rivière. On néglige les frottements. On propose de définir un axe $y$ pointant vers le haut et ayant son origine au niveau de la rivière.

1. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale, montrer que la longueur à vide $l_0$ de l'élastique est $l_0 = h - \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$.
2. Montrer que, durant son saut, l'étudiante atteint sa vitesse maximale à la position $y = h - l_0 - \frac{mg}{k}$.

## 3 Pendule perturbé par un ressort




Un point matériel de masse $m$ est contraint à se déplacer sans frottement sur un cercle vertical de rayon $R$. Il est soumis à son poids et à la force d'un ressort qui le relie à un point fixe $F$ sur la circonférence du cercle, situé à la même hauteur que le centre du cercle. Le ressort a une raideur $k$ et une longueur à vide nulle.

a) Montrer que l'énergie potentielle du point matériel en fonction de $\theta$ s'écrit

$$E_{pot}(\theta) = -kR^2 \cos\theta - mgR\sin\theta + \text{constante}.$$

b) Montrer que les deux positions d'équilibre sont $\theta_{\text{eq},1} = \arctan\frac{mg}{kR}$ et $\theta_{\text{eq},2} = \arctan\frac{mg}{kR} + \pi$ et montrer que la première est stable mais pas la seconde.
*Rappel* : aux positions d'équilibre, la dérivée de l'énergie potentielle est nulle.

c) Calculer la pulsation des petites oscillations harmoniques autour d'une position d'équilibre stable.

d) Vérifier que les réponses aux questions b) et c) donnent les résultats attendus dans les deux cas limites définis par $k \to 0$ et $g \to 0$.

*Indication :* $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$ et $\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}$