# Corrigé 6 : énergie et équilibre

1. **Objet dans un potentiel**

   L'énergie mécanique de la masse $m$ est conservée :

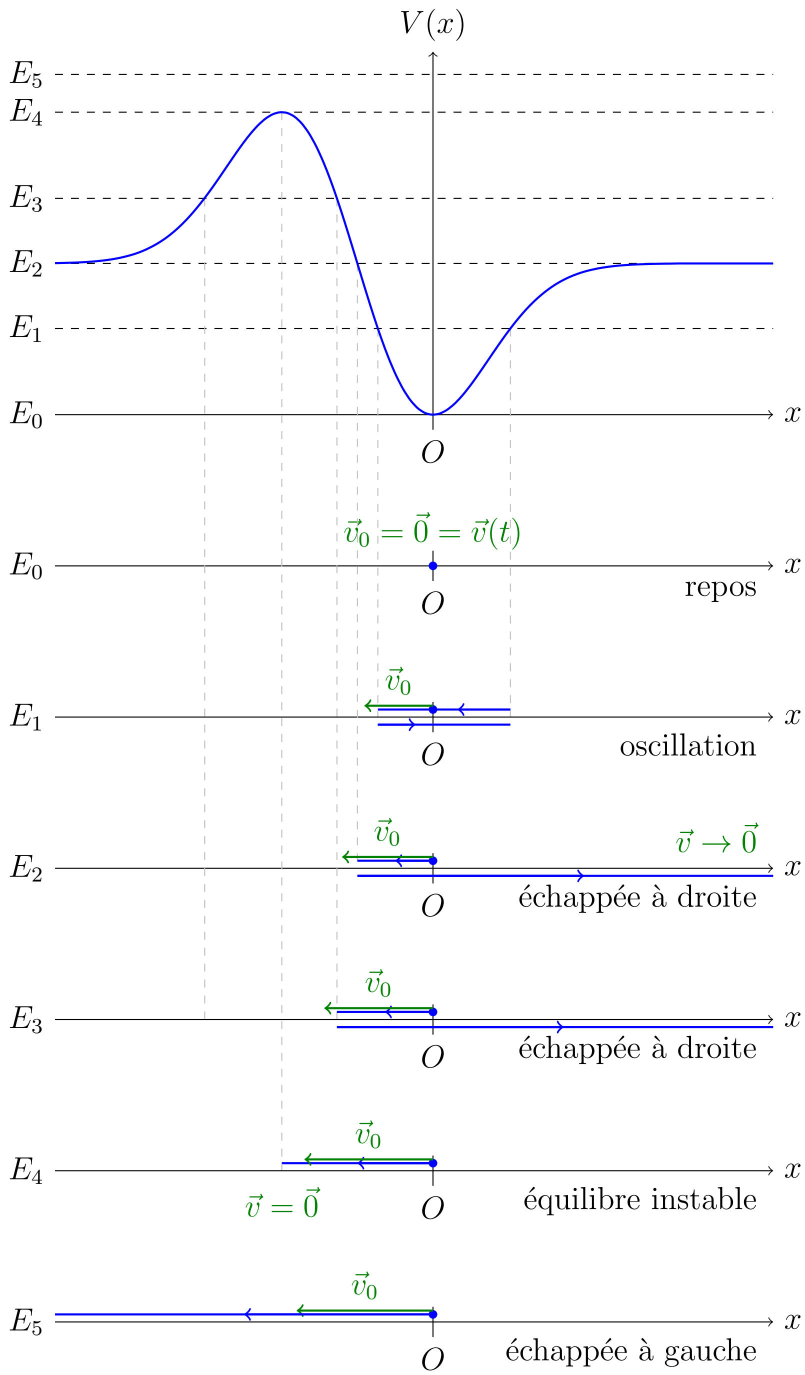
   $$\frac{1}{2}mv^2(x) + V(x) = E_n\,.$$

   Par conséquent,

   — à $t = 0\,,\ x = 0\,,\ V = 0$ et la vitesse initiale est $v_0 = -\sqrt{\frac{2E_n}{m}}\,,$

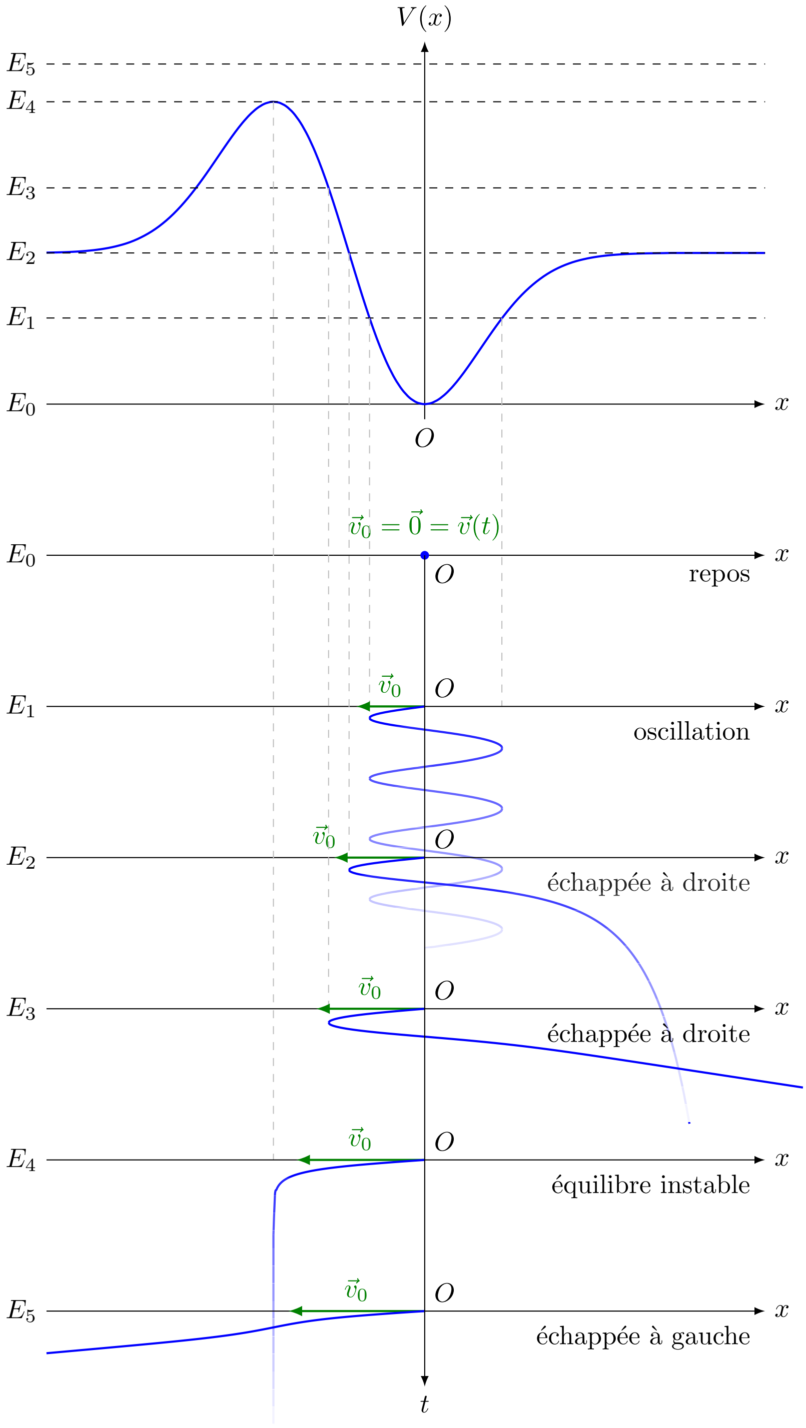
   — lorsque $x$ est tel que $V(x)$ atteint l'énergie mécanique, l'énergie cinétique est nulle et l'objet est arrêté.

   On en déduit la trajectoire de l'objet,



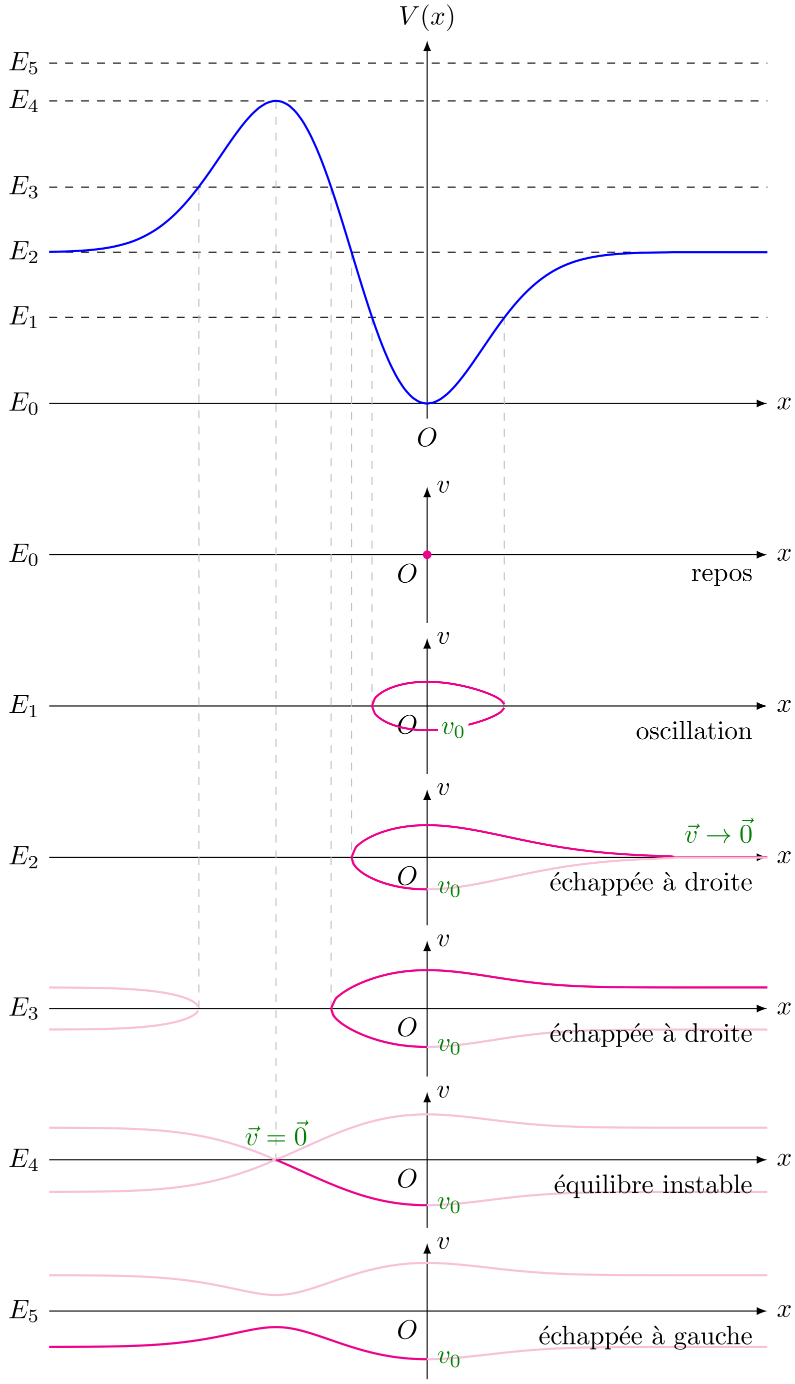
$V(x)$
$E_5$
$E_4$
$E_3$
$E_2$
$E_1$
$E_0$
$x$
$O$
$\vec{v}_0 = \vec{0} = \vec{v}(t)$
repos
$\vec{v}_0$
oscillation
$\vec{v} \to \vec{0}$
échappée à droite
échappée à droite
$\vec{v} = \vec{0}$
équilibre instable
échappée à gauche

son horaire



$V(x)$
$E_5$
$E_4$
$E_3$
$E_2$
$E_1$
$E_0$
$x$
$O$
$\vec{v}_0 = \vec{0} = \vec{v}(t)$
repos
$\vec{v}_0$
oscillation
échappée à droite
échappée à droite
équilibre instable
échappée à gauche
$t$

et son orbite : on peut aussi visualiser la vitesse en reportant sa composante selon $\hat{x}$ sur l'axe vertical. L'espace $(x, v)$ est appelé diagramme de phase et une courbe donnant la relation entre $x$ et $v$ est une orbite.




2. **Conservation de l'énergie mécanique**

   Comme on suppose qu'il n'y a pas de frottement, les seules forces agissant sur la luge pendant la descente sont la force de gravitation (qui est une force conservative) et le soutien du sol (force de liaison, toujours perpendiculaire à la vitesse). On peut donc exploiter la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{\text{méc.}} = E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}} = \text{constante}\,.$$

   En choisissant comme niveau de référence le bas de la piste, l'énergie mécanique s'écrit ...

… en haut de la piste (avec une vitesse initiale nulle et une hauteur $h$) :

$$E_{\text{méc.}}(1) = 0 + E_{\text{pot.}} = mgh\,;$$

… en bas de la piste (avec une vitesse finale de norme $v$ et une hauteur nulle) :

$$E_{\text{méc.}}(2) = E_{\text{cin.}} + 0 = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

La conservation de l'énergie mécanique fournit alors

$$E_{\text{méc.}}(1) = E_{\text{méc.}}(2) \quad\Leftrightarrow\quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{2gh} = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,,$$

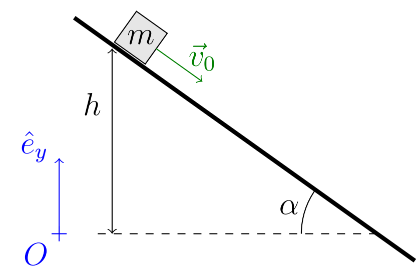
où l'on a pris $g \cong 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

3. **Théorème de l'énergie cinétique, forces non conservatives, puissance**

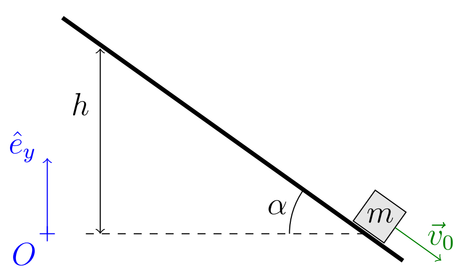
Nous allons exploiter la conservation de l'énergie entre deux instants $t_1$ et $t_2$, ainsi que la définition du travail d'une force.

(a) Considérons deux instants $t_1$ et $t_2$ :

i) instant $t_1$




ii) instant $t_2$




En choisissant l'origine comme sur le dessin, les énergies mécaniques en $t_1$ et $t_2$ associées au bloc de masse $m$ (assimilé à un point matériel) s'écrivent :

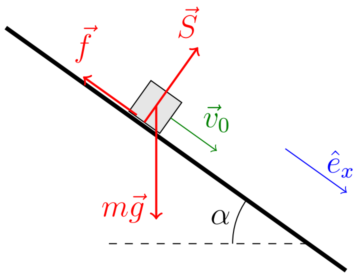
$$E_{\text{méc.}}(1) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \quad\text{et}\quad E_{\text{méc.}}(2) = \frac{1}{2}mv_0^2\,.$$

Ainsi, la variation d'énergie mécanique du bloc $m$ sur une dénivellation $h$ est donnée par

$$\Delta E_{\text{méc.}} = E_{\text{méc.}}(2) - E_{\text{méc.}}(1) = -mgh\,.$$

L'énergie mécanique diminue. Il doit donc exister un frottement exercé par le plan incliné qui freine le bloc de masse $m$.

(b) Trois forces s'exercent sur le bloc de masse $m$ : une force de frottement $\vec{f}$ tangente à la trajectoire, une force de soutien $\vec{S}$ perpendiculaire à la trajectoire (force de liaison) et la force d'attraction gravitationnelle (poids $m\vec{g}$ du bloc).



(c) Comme le soutien est toujours perpendiculaire au plan incliné, et donc à la trajectoire du bloc, il ne travaille pas :

$$W_{1\to2}(\vec{S}) = 0\,.$$

Quant au travail du poids, il s'écrit

$$W_{1\to2}(m\vec{g}) = mgh\,.$$

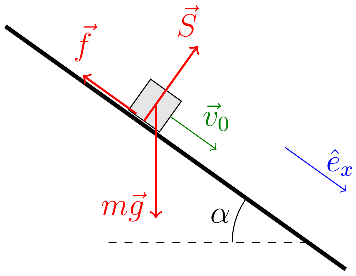
Finalement, la vitesse du bloc étant constante, le théorème de l'énergie cinétique permet de trouver l'expression du travail de la force de frottement :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin.}}(2) - E_{\text{cin.}}(1) &= W_{1\to2}(m\vec{g}) + W_{1\to2}(\vec{f}) + W_{1\to2}(\vec{S}) \\ 0 &= mgh + W_{1\to2}(\vec{f}) + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad W_{1\to2}(\vec{f}) &= -mgh \\ &= E_{\text{méc.}}(2) - E_{\text{méc.}}(1)\,. \end{aligned}$$

On note bien que le travail des forces non conservatives (ou dissipatives) est égal à la variation de l'énergie mécanique.

(d) Considérons à nouveau l'ensemble des forces s'exerçant sur le bloc de masse $m$ :




La deuxième loi de Newton appliquée au bloc de masse $m$ s'écrit

$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = m\vec{a} = \vec{0}\,.$$

En projetant selon $\hat{e}_x$, le long de la pente, il vient

$$f = mg\sin\alpha = \text{constante}\,.$$

La force de frottement $\vec{f}$ est donc constante.

(e) On note immédiatement que la puissance instantanée fournie par la force de soutien est nulle (car le travail fourni par cette force de liaison est toujours nul). D'autre part, pendant un intervalle de temps $dt$, le bloc de masse $m$ se déplace de $ds$ le long du plan incliné et le travail sur le bloc fourni par la force de frottement s'écrit

$$dW_{\vec{f}} = -f\,ds\,.$$

La puissance a donc pour expression

$$P_{\vec{f}} = \frac{dW_{\vec{f}}}{dt} = -f\,\frac{ds}{dt} = -f\,v_0 = -mg\sin\alpha\,v_0\,.$$

Cette puissance est identique, au signe près, à celle fournie par la gravitation (en fait, par la composante du poids parallèle au plan incliné) :

$$P_{m\vec{g}} = -P_{\vec{f}} = +mg\sin\alpha\,v_0\,.$$