Plan du cours

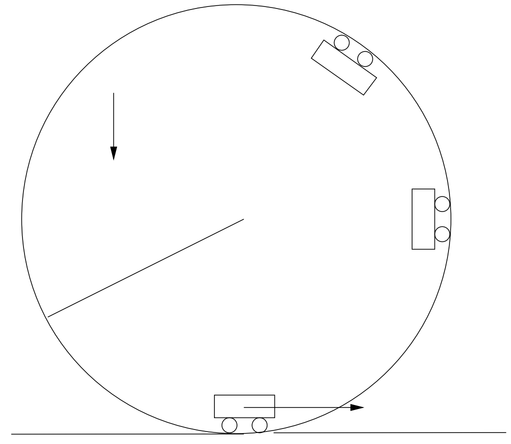
~2 semaines par chapitre

1. **Introduction, Oscillateur harmonique**
2. **Cinématique et dynamique du point matériel**
3. **Frottements secs; Travail, forces conservatives, énergie**
4. Gravitation, moment cinétique
5. Système de points matériels, lois de conservation
6. Cinématique et dynamique du solide indéformable
7. Mouvement relatif et changement de référentiel

Rappel : les **séries préparatoires** vous aident à faire la transition entre le cours et les exercices de type examen

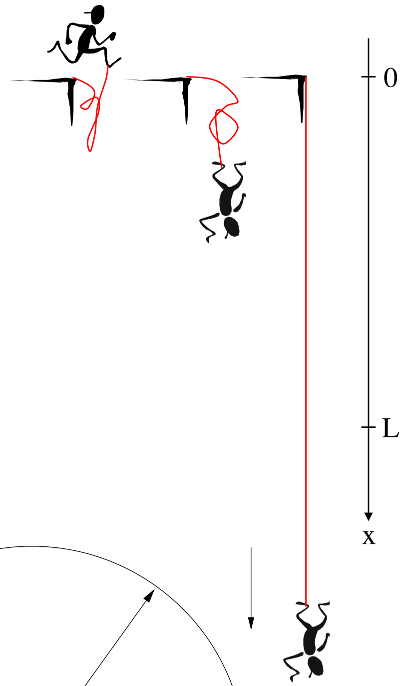
Exercices en séance 06

1) Looping : Calculer la force de réaction du circuit sur la voiture en fonction de la position de la voiture sur la piste circulaire et de sa vitesse d'entrée



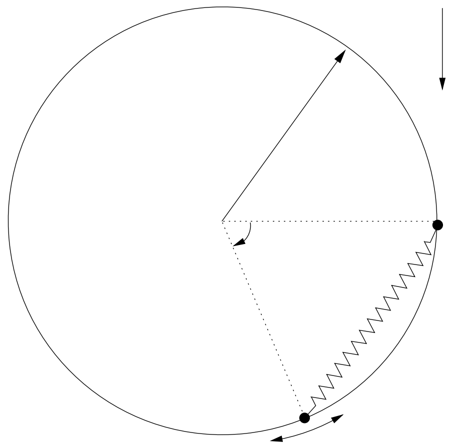
<u>Nouvelles notions</u> : Energie potentielle de **pesanteur**
Conservation énergie mécanique

2) Saut à l'élastique : calculer longueur à vide pour éviter le crash; calculer vitesse maximale de chute



<u>Nouvelles notions</u> : Energie potentielle **élastique** (=ressort)
Conservation énergie mécanique

3) Pendule + ressort : trouver les positions d'équilibres, leurs stabilités et la pulsation des petites oscillations autour de ces positions.



<u>Nouvelles notions</u> : Equilibres dans un potentiel quelconque.

Remarque (1,3) : pas de frottement,
forces de liaison ne travaillent pas

Energie potentielle

- Un force est dite **conservative** si son travail entre deux points **ne dépend pas du chemin suivi** (mais uniquement des points de départ et d'arrivée)

- Une telle force $\overrightarrow{F}$ *dérive alors d'un potentiel* $V(\vec{r})$, c'est à dire

$$\boxed{\vec{F} = -\begin{pmatrix} \partial V/\partial x \\ \partial V/\partial y \\ \partial V/\partial z \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} V}$$

N.B.: l'*énergie potentielle est définie à une constante près*

- Dans ce cas: $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = K_2 - K_1$

- Si toutes les forces sont conservatives alors l'*énergie mécanique* est conservée

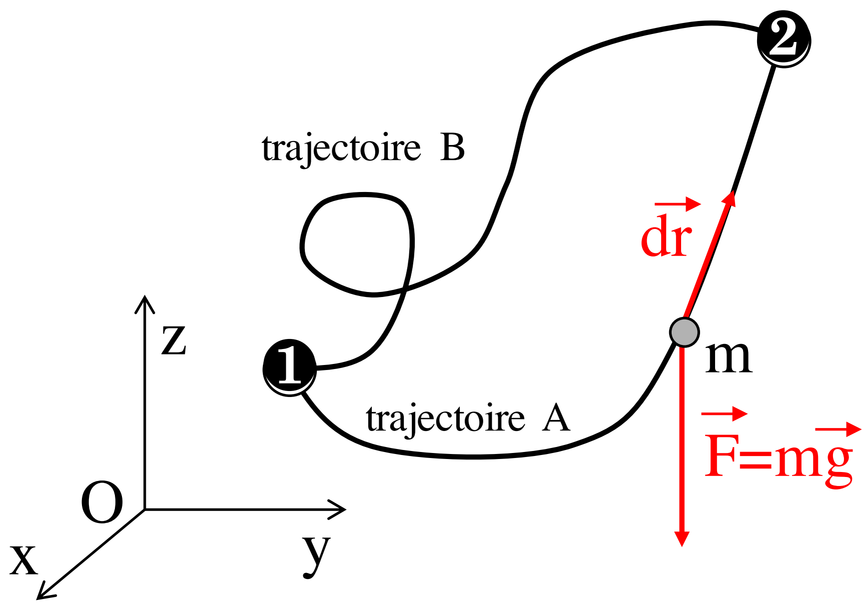
$$V(\vec{r}_2) + K_2 = V(\vec{r}_1) + K_1$$

$$\boxed{E = K + V}$$

énergie mécanique

EPFL

Exemple 1 : force de pesanteur



- Deux trajectoires possibles A et B

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 mgdz = mg(z_1 - z_2)$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = mgz}$$

- Le travail ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des points de départ et d'arrivée => pesanteur : conservative

- Remarque : Pour un chemin fermé

$$W_{1\to 2\to 1} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{12} + W_{21} = 0$$

Notation: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

L'énergie est une "intégrale première" du mouvement

- On appelle intégrale première du mouvement toute quantité ne faisant intervenir que des **dérivées premières par rapport au temps** et qui **se conserve** au cours du temps.

- De manière générale, une intégrale première du mouvement est une équation reliant l**a norme des vecteurs position et vitesse** sans faire intervenir l'accélération d'un système donné

Pour une force conservative quelconque

$$\begin{aligned}
\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) &= m\frac{d\vec{v}}{dt} \\
-\vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \vec{v} &= m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \\
-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} &= m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{v}^2 \\
\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) \\
\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r})\right\} &= 0
\end{aligned}$$

$\Downarrow$

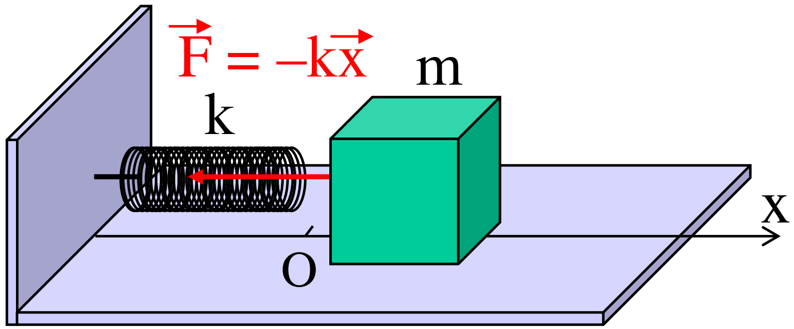
énergie mécanique = constante

EPFL

Exemple 2 : force de rappel d'un ressort

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 kx dx = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{2}kx^2}$$



Autre approche : Calcul de l'intégrale première du mouvement

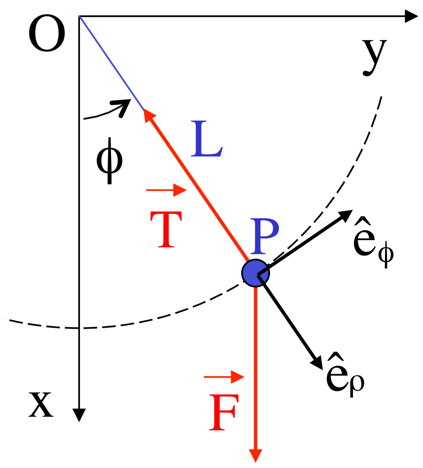
$$\begin{aligned}
-kx &= m\ddot{x} \\
-kx\dot{x} &= m\ddot{x}\dot{x} \\
\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right) &= m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot{x}^2 \\
\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= \text{Const.} \\
\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 &= \text{Const.}
\end{aligned}$$

Energie cinétique *Energie potentielle* *Energie mécanique totale*

EPFL

Exemple 3 : le pendule

$$
\begin{aligned}
-\frac{g}{L}\sin\phi &= \ddot{\phi} \\
-\frac{g}{L}\sin\phi\dot{\phi} &= \ddot{\phi}\dot{\phi} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{L}\cos\phi\right) \\
\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{L}\cos\phi &= \text{Const.}
\end{aligned}
$$



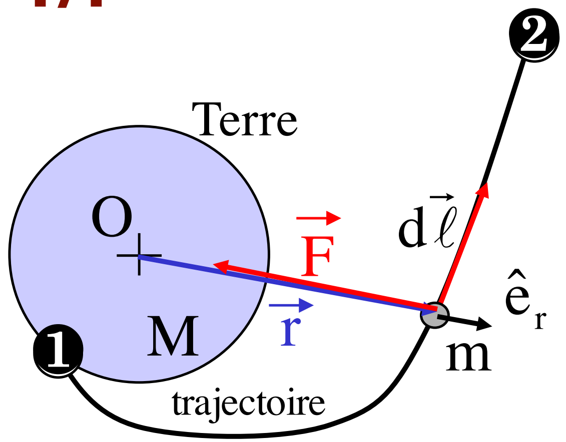
$$
\frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2 - mgL\cos\phi = \text{Const}
$$

Energie cinétique *Energie potentielle* *Energie mécanique totale*

$$\frac{1}{2}mv^2 \qquad mg(-x)$$

Potentiel associé à une force centrale en $1/r^2$

- Force de gravitation, forces électriques



$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_1^2 \frac{GmM}{r^2} \hat{e}_r \cdot d\vec{l} = -\int_1^2 \frac{GmM}{r^2} dr$$

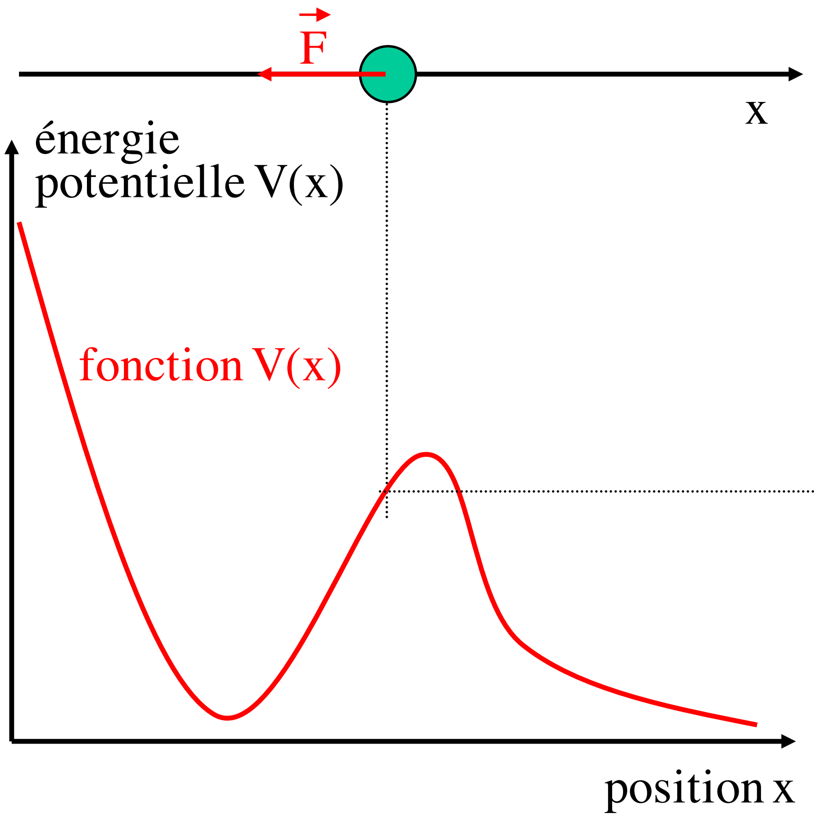
$$W_{12} = -\frac{GmM}{r_1} + \frac{GmM}{r_2}$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = -\frac{GmM}{r}}$$

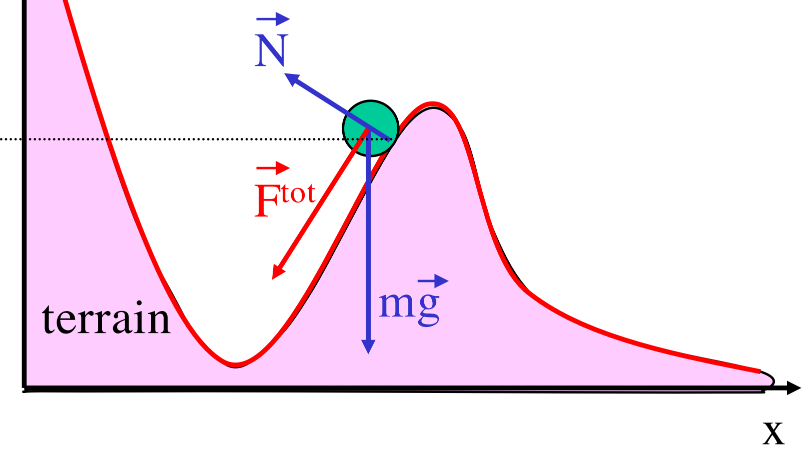
Mouvement rectiligne dans un potentiel

- Considérations générales
  - Point matériel se déplaçant sur un axe x et soumis à une **force conservative**

$$F_x = -\frac{dV}{dx}$$



  - Analogie: une bille soumise à son poids et contrainte à se déplacer sans frottement sur un relief
  - Dans ce cas le potentiel correspond à l'énergie potentielle de pesanteur



Equilibre et petites oscillations

- L'étude de la fonction V(x) permet de déterminer les points d'équilibre, leur **stabilité** et la **fréquence des petites oscillations** autour de ces points

$$\boxed{F(x_0) = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0 \text{ est un point d'équilibre}}$$

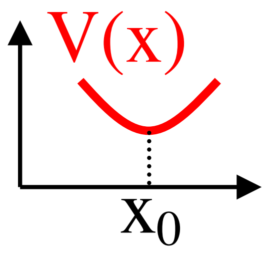
- Développement limité de la fonction V autour du point d'équilibre

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x_0}}_{=0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{d^2V}{dx^2}|_{x_0}}_{=k(x_0)}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$V(x) \sim V(x_0) + \frac{1}{2}k(x_0)(x-x_0)^2$$

Equilibre et petites oscillations

- Deux cas possibles:

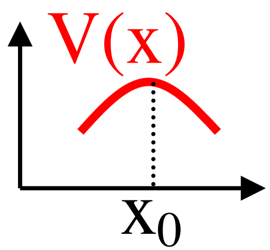


$$k(x_0) = \frac{d^2V}{dx^2}|_{x_0} > 0$$

l'équilibre est **stable** et garanti par une force de rappel

le point matériel effectue de petites oscillations autour du point d'équilibre à la fréquence

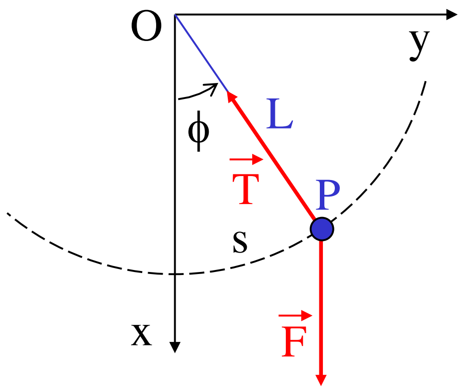
$$\omega = \sqrt{\frac{k(x_0)}{m}}$$



$$k(x_0) = \frac{d^2V}{dx^2}|_{x_0} < 0$$

l'équilibre est **instable**, la force autour du point d'équilibre éloigne le point matériel de x_0 dès que $x \neq x_0$

Exemple: pendule rigide



- Point matériel attaché à une tige, soumis à son poids

  Energie potentielle: $V = -mgx = -mgL\cos(s/L)$

- Points d'équilibre

$$\frac{dV}{ds} = mg\sin(s/L) = 0 \Leftrightarrow s/L = 0 \,\text{ou}\, \pi$$

- Stabilité des points d'équilibre:

$$\frac{d^2V}{ds^2} = mg/L\cos(s/L) = \begin{cases} mg/L & \text{si} \quad \phi = 0 \\ -mg/L & \text{si} \quad \phi = \pi \end{cases}$$

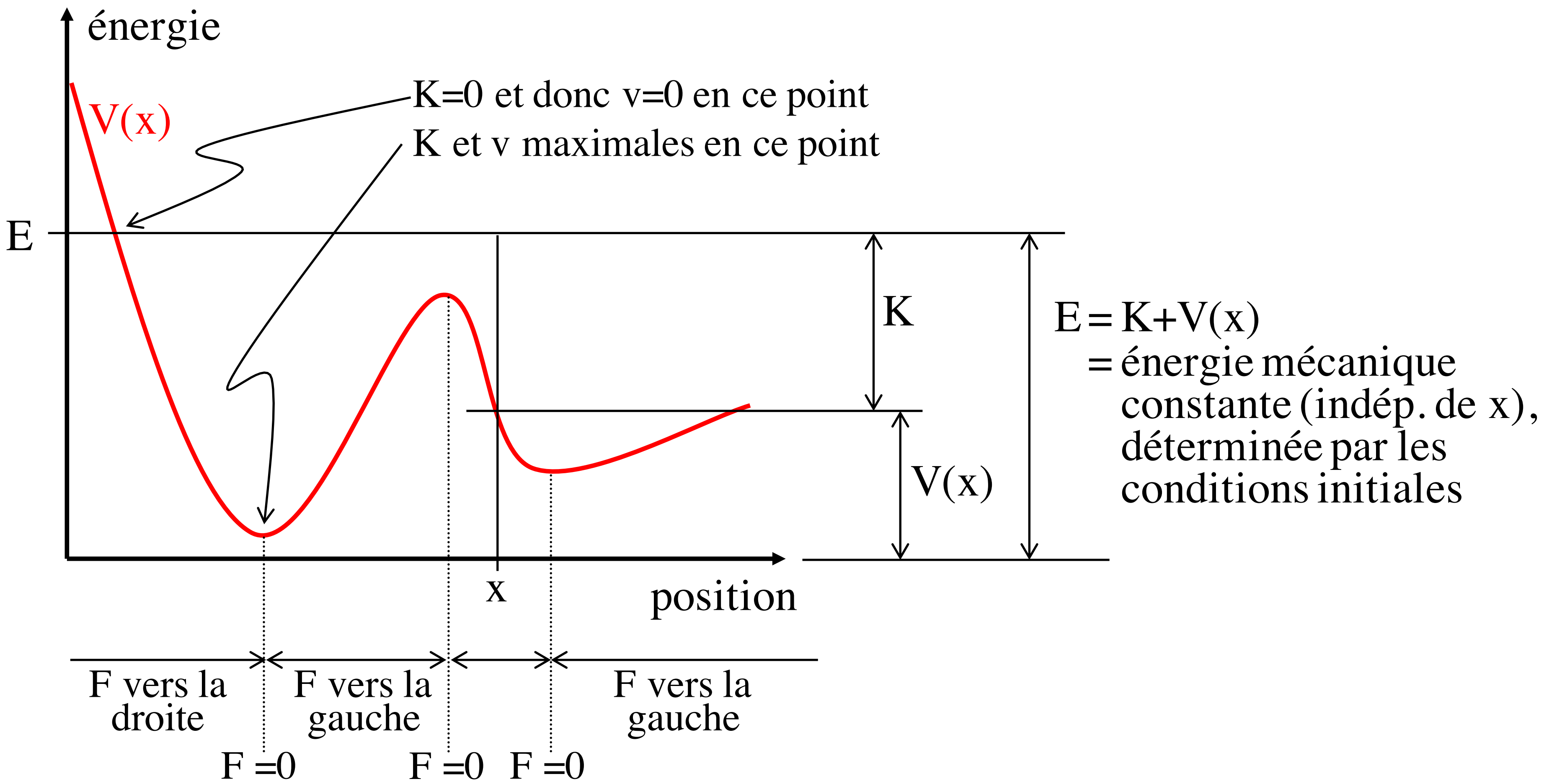
equilibre stable

equilibre instable

- Pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{d^2}{ds^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Mouvement rectiligne dans un potentiel

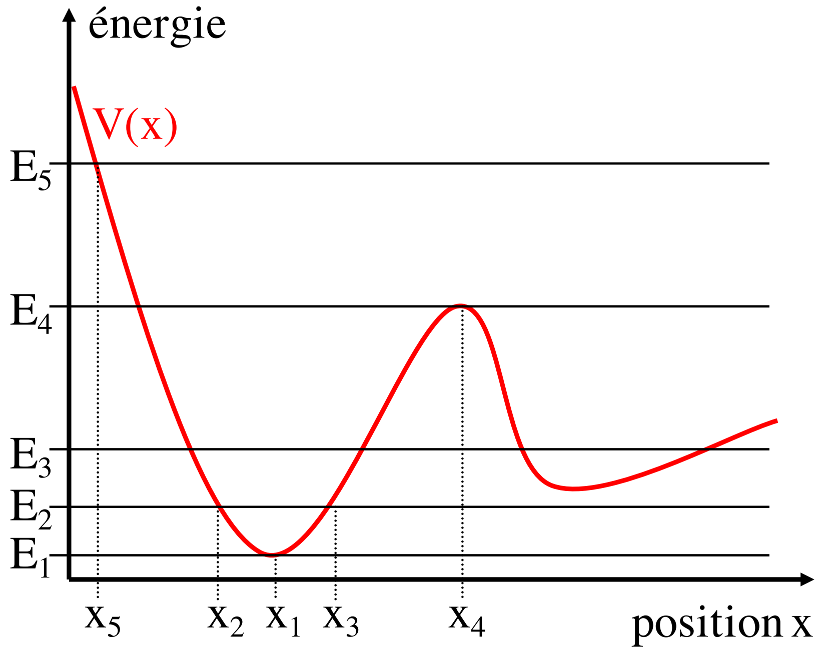


Force : pente du profil de potentiel

F = 0 aux extrema

Mouvement rectiligne dans un potentiel

- Condition: $K \geq 0 \implies E \geq V(x)$
- $E = E_1 \quad x = x_1$ On a un point d'équilibre $(F = 0, \; v = 0)$
- $E = E_2$ oscillations entre x_2 et x_3 . Les points d'arrêt sont x_2 et x_3
- $E = E_3$ deux plages de position accessibles séparées par une barrière de potentiel infranchissable
- $E = E_4$ position d'équilibre instable en $x = x_4$
- $E = E_5$ la particle peut accéder à l'infini.



Théorème de l'énergie

- Point matériel soumis à des forces conservatives et non conservatives

$$\vec{F}^C = \sum_k \vec{F}_k = -\sum_k \vec{\nabla} V_k(\vec{r}) \qquad \vec{F}^{NC}$$

- Energie mécanique

$$E(\vec{r},\vec{v}) = K(\vec{v}) + V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \sum_k V_k(\vec{r})$$

- Entre deux points 1 et 2

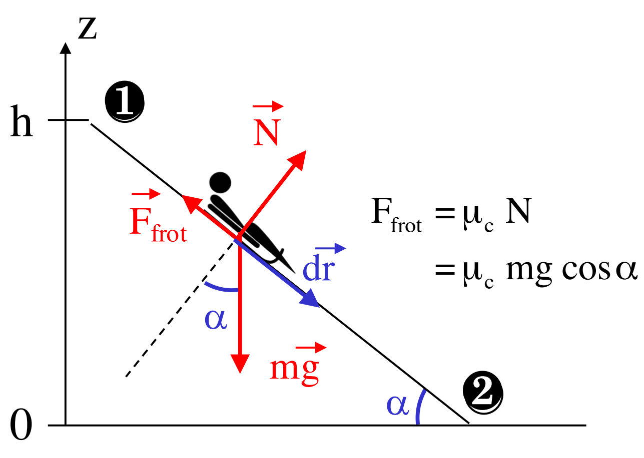
$$K_2 - K_1 = W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) + W_{12}^{NC}$$

$$\boxed{E_2 - E_1 = W_{12}^{NC} \Leftrightarrow \frac{dE}{dt} = P^{NC}}$$

La variation d'énergie mécanique est donnée par la puissance des forces non conservatives

- Si toutes les forces sont conservatives l'énergie est conservée

Exemple: la vitesse d'une luge



- Pente suffisante: $\tan\alpha \geq \mu_s$
- Point de départ: $z_1 = h,\ v_1 = 0$

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = mgh$$

- Point d'arrivée: $z_2 = 0,\ v_2 = ?$

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

- Théorème de l'énergie:

$$E_2 - E_1 = W_{12}^{NC} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_1^2 F_{\text{frot}}ds = -mg\mu_c\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh = -mg\mu_c\frac{h}{\tan\alpha}$$

$$\Longrightarrow v_2 = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha}\right)}$$