On a donc $a_0 \leq a_n \overset{(i)}{\leq} b_n \leq b_0$.

croissante & majorée — décroissante & minorée

Donc par le critère de convergence monotone, (a_n) et (b_n) convergent

$\cdot\ 0 = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$ ∎

<u>Remarque</u> : si (a_n) et (b_n) convergent et que

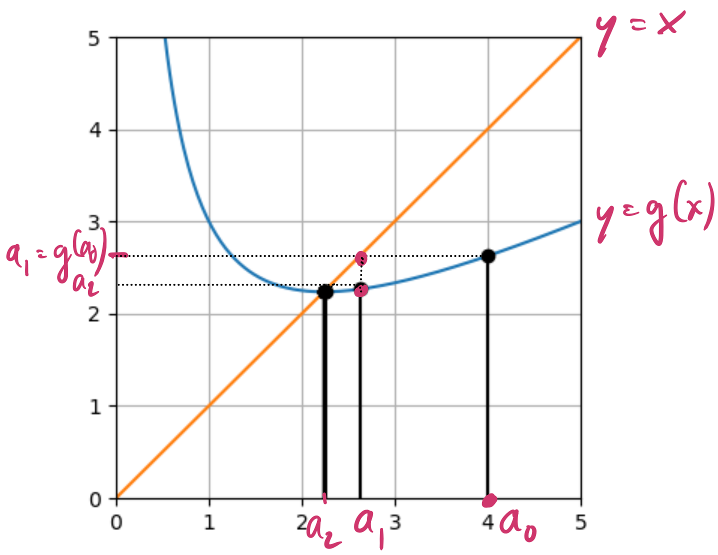
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$, $a_n \leq b_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n$.
- ———— $a_n < b_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n$.

"la limite préserve les inégalités larges"

3.6 Suites définies par récurrence

<u>Exemple</u> : $\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} = g(a_n), \forall n \geq 1 \end{cases}$ où $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right) \end{array}\right.$

$$= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$$



fin cours 20/10/22

0) On a $a_0 = 4 > 0$ et si $a_n > 0$ alors $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) > 0$ donc par récurrence, $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ donc la suite est bien définie (car $a_n \in \mathrm{Dom}(g)$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

(i) Supposons que (a_n) converge et que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = a \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} a_n + \frac{5}{2}\frac{1}{\lim_{n\to+\infty} a_n} = \frac{1}{2}\left(a+\frac{5}{a}\right) \end{cases}$$

on a besoin de $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ ici

On a donc $a = g(a) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}a = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{a}$

$\Leftrightarrow a^2 = 5 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{5}$

Mais $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ donc si (a_n) converge, la limite vaut $\sqrt{5}$ (ou 0).

(ii) Montrons que (a_n) est minorée par $\sqrt{5}$.

- On a $a_0 = 4 > \sqrt{5}$
- Si $a_n \geq \sqrt{5}$ alors

$$a_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) - \sqrt{5}$$
$$= \frac{a_n^2 - 2\sqrt{5}a_n + 5}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{5})^2}{2a_n} \geq 0 \text{ car } a_n > 0.$$

- Donc par récurrence, $a_n \geq \sqrt{5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (en particulier 0 ne peut pas être limite de (a_n)).

(iii) Montrons que (a_n) est décroissante.

On a $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) - a_n$

$$= \frac{5}{2a_n} - \frac{1}{2}a_n$$
$$= \frac{5 - a_n^2}{2a_n} \leq 0 \text{ car } \begin{cases} a_n \geq \sqrt{5} \\ a_n > 0 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc (a_n) est décroissante.

(iv) En conclusion (a_n) est décroissante et minorée donc elle converge.

Sa limite est $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{5}}$.

Plus généralement, pour $c > 0$, $\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \end{cases}$ converge vers $\sqrt{c}$.

Algorithme de Héron / Babylone / Newton

Suites définies par récurrence linéaire

Thm. Soit $g(x) = q \cdot x + b$ avec $b, q \in \mathbb{R}$ et $q \neq 1$.

Soit (a_n) la suite définie par $\begin{cases} a_0 \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = g(a_n) = q \cdot a_n + b, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Soit $a = \frac{b}{1-q}$ (l'unique solution de $a = g(a) = q \cdot a + b$).

- Si $|q| < 1$ ou si $a_0 = a$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ existe $= a$
- Si $|q| \geq 1$ et si $a_0 \neq a$ alors (a_n) diverge.

Preuve : (0) La suite est bien définie car $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{R}$

(i) Si (a_n) converge alors

$$a = \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} (q \cdot a_n + b) = q \cdot \left(\lim_{n \to +\infty} a_n\right) + b = q \cdot a + b$$

Donc $a = \frac{b}{1-q}$

(Si $q = -1$: $a_{n+1} - a = -(a_n - a)$ donc $a_n - a = (-1)^n (a_0 - a)$)

(ii) Pour $n \geq 0$, on a

$$|a_{n+1} - a| = |q\, a_n + b - (q \cdot a + b)| = |q \cdot (a_n - a)|$$
$$= |q| \cdot |a_n - a|$$
$$= |q|^n \cdot |a_0 - a|$$

(par récurrence, car $b_n = |a_n - a|$ est géométrique de raison $|q|$)

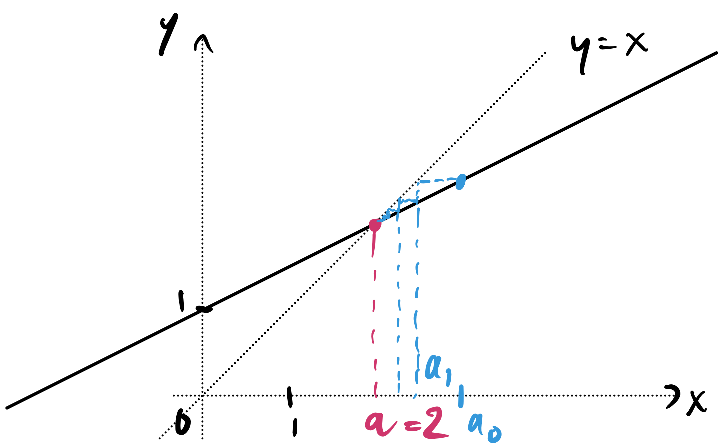
→ Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n - a| = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - a) = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$

→ Si $a_0 = a$ alors $\forall n$, $|a_n - a| = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$

→ Si $|q| \geq 1$ et $a_0 \neq a$ la suite diverge. ∎

Exemple : $a_0 = 3$ et $a_{n+1} = \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{q} a_n + \underbrace{1}_{b}$, $\forall n \geq 0$.



$a = \frac{1}{2} a + 1 \Leftrightarrow a = 2$

Ici $|q| = \frac{1}{2} < 1$

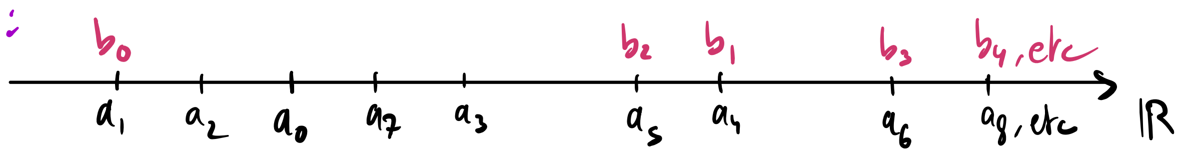
donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = a = 2$

3.7 Sous-suites et Thm. de Bolzano-Weierstrass

Def. Soit $(n_k)_{k \geq 0}$ une strictement croissante d'entiers naturels, c'est à dire $\forall k \in \mathbb{N}$:
- $n_k \in \mathbb{N}$
- $n_{k+1} > n_k$

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite (réelle).
La suite $(b_k)_{k \geq 0}$ définie par $b_k = a_{n_k}$ est appelée une sous-suite de la suite (a_n).

Exemple :



ici : $n_0 = 1$, $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$, $n_4 = 8$, etc...

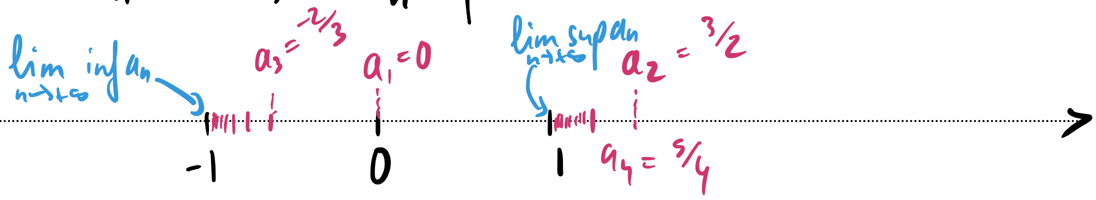
Thm (Bolzano-Weierstrass). De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Def (Point d'accumulation). $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de la suite (a_n) s'il existe une sous-suite $(a_{n_k})_{k \geq 0}$ telle que

$$\lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = a.$$

$\rightsquigarrow$ Le Thm de B.-W. nous dit que toute suite bornée admet au moins un point d'accumulation.

Exemple : $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$



Les points d'accumulation sont -1 et 1 car

deux sous-suites de (a_n)

- $\lim_{k \to +\infty} a_{2k} = \lim_{k \to +\infty} 1 + \frac{1}{2k} = 1$ (ici $n_k = 2k$)
- $\lim_{k \to +\infty} a_{2k+1} = \lim_{k \to +\infty} -1 + \frac{1}{2k+1} = -1$ (ici $n_k = 2k+1$)

⚠ $(a_{3k})_{k \geq 0}$ est aussi une sous-suite (avec $n_k = 3k$) mais elle ne converge pas.

Rmq : • Si (a_n) converge vers $a \in \mathbb{R}$, alors a est l'unique point d'accumulation de (a_n).

3.8 Limite inférieure et limite supérieure

Soit (a_n) une suite bornée.

$A_0 = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ $\qquad b_0 := \inf A_0 \leq \sup A_0 =: c_0$

$A_1 = \{a_1, a_2, \dots\}$ $\qquad b_0 \leq b_1 := \inf A_1 \leq \sup A_1 =: c_1 \leq c_0$

$\vdots$

$A_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ $\qquad b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n := \inf A_n \leq \sup A_n \leq c_n \leq \dots \leq c_1 \leq c_0$

fin 24/10/2022