V) Energie potentielle

Travail d'une force conservatire entre deux points :

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 -\vec{\nabla}V(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\hat{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z\right)\cdot\left(dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y + dz\,\hat{e}_z\right)$$

$$= \int_1^2 -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz = -\left[V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)\right] = V_1 - V_2$$

$\boxed{W_{12} = V_1 - V_2}$ → Travail = "chute de potientel" (positif si potentiel décroit)

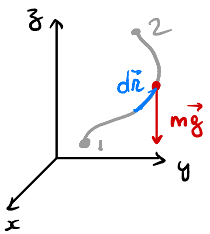
D'après le théorème de l'énergie cinétique : $K_2 - K_1 = W_{12} = V_1 - V_2$

$\Rightarrow \boxed{K_2 + V_2 = K_1 + V_1}$

L'energie mécanique $\boxed{E = K + V}$ est conservée lorsque toutes les forces sont conservatives

↘ définie à une constante près.

Ex 1 : Force de pesanteur



Travail de $\vec{F} = m\vec{g}$ entre 1 et 2 ?

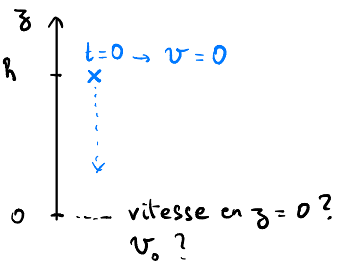
$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 -mg\,\hat{e}_z\cdot d\vec{r} = \int_1^2 -mg\,dz$$

$$= -mg(z_2 - z_1) = \underbrace{mgz_1}_{V_1} - \underbrace{mgz_2}_{V_2}$$

On vient de montrer que $\boxed{V(\vec{r}) = mgz}$

Rmq : Si $\hat{e}_z'$ pointe vers le bas on trouve $V(\vec{r}') = -mgz'$

Application : chute libre (pas de frottement)



- En $z = h$, l'énergie mécanique vaut :

$$E(z=h) = K + V = 0 + mgh$$

- En $z = 0$, on a :

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$$

Donc comme $E = c^{ste}$: $mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$

$$v_0 = \pm\sqrt{2gh}$$

* Equivalence avec les équations du mouvement : intégrale première du mvt.

On part de l'éq. du mvt : $m\ddot{z} = -mg \xrightarrow{\times \dot{z}} m\ddot{z}\dot{z} + mg\,\dot{z} = 0$

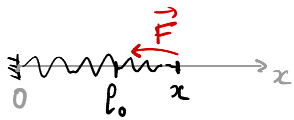
or $\frac{d}{dt}(\dot{z})^2 = 2\ddot{z}\dot{z}$ d'où $\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\dot{z})^2 + mg\frac{d}{dt}(z) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\tfrac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz}_{\text{Energie méca}}\Big] = 0$$

Energie méca = constante

$K = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$; $V = mgz$

Ex 2 : Force de rappel (ressort, élastique)



$$\vec{F} = -k(x-\ell_0)\,\hat{e}_x$$

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 -k(x-\ell_0)\,dx = -k\times\frac{1}{2}\left[(x-\ell_0)^2\right]_1^2$$

$$= -\frac{k}{2}\left[(x_2-\ell_0)^2 - (x_1-\ell_0)^2\right]$$

$$W_{12} = \underbrace{\frac{1}{2}k(x_1-\ell_0)^2}_{V_1} - \underbrace{\frac{1}{2}k(x_2-\ell_0)^2}_{V_2}$$

Donc l'énergie potentiel associée à la force de rappel est :

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2} = \frac{1}{2}k\,(\text{élongation})^2$$

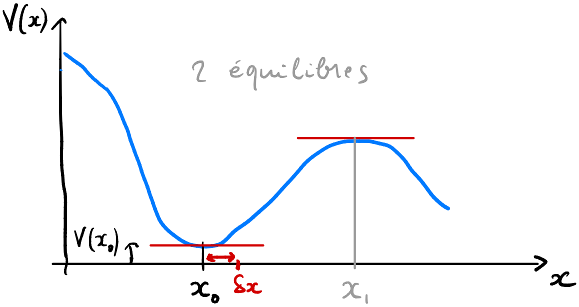
Si on fait un changement d'origine : $\delta x = x - \ell_0$ alors $\boxed{V(\delta x) = \frac{1}{2}k(\delta x)^2}$

VI) Equilibres : stables ou instables

Point matériel soumis à une force totale conservative contraint à se déplacer selon une dimension → coordonnée "x"

(NB : Exercice 3 $x \to R\theta$)

* <u>Positions d'équilibre</u> : $\vec{F}(x_{eq}) = \vec{0} \Rightarrow -\dfrac{dV}{dx}(x_{eq}) = 0 \rightarrow V(x)$ a soit un maximum ou un minimum en $x = x_{eq}$



notation : $\dfrac{dV}{dx}(x_{eq}) = \left.\dfrac{dV}{dx}\right|_{x=x_{eq}}$

↳ Dérivée de la fonction $V(x)$ prise au point x_{eq}

On étudie les petits déplacements autour de x_0 : on pose $\boxed{\delta x = x - x_0}$

Développement limité de $V(x)$ autour de x_0 :

pente de $V(x)$ en x_0 — courbure de $V(x)$ en x_0

$$\boxed{V(\delta x) = V(x_0) + \frac{dV}{dx}(x_0)\times \underset{(x-x_0)}{\delta x} + \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2}(x_0)\times \underset{(x-x_0)^2}{(\delta x)^2}} + \cdots$$

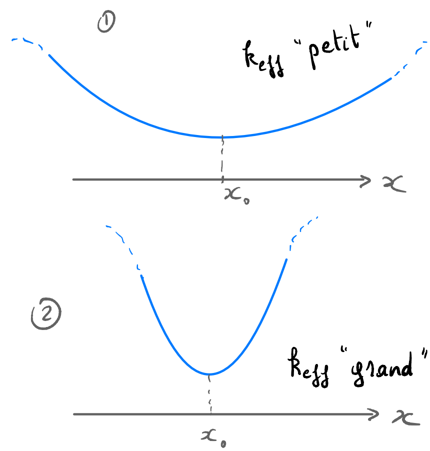
approximation proche de x_0

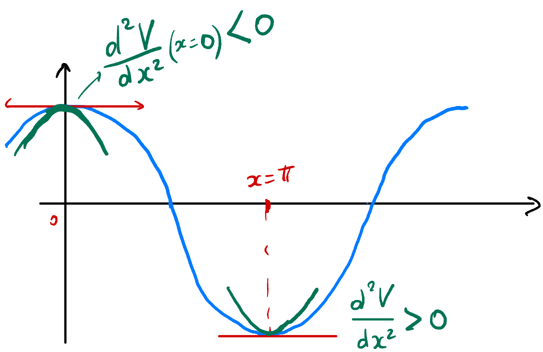
Ici en x_0 : $\dfrac{dV}{dx}(x_0) = 0$ donc

$$V(\delta x) = \frac{1}{2} k_{eff} (\delta x)^2 + \text{constante}$$

où $\boxed{k_{eff} = \underbrace{\dfrac{d^2V}{dx^2}(x_0)}}$

Graphiquement : courbure de la fonction $V(x)$ en x_0





Exemple : $\boxed{V(x) = \cos x}$

$\dfrac{dV}{dx} = -\sin x \rightarrow$ deux équilibre $x = 0$; $x = \pi$

$\dfrac{d^2V}{dx^2} = -\cos x \Rightarrow$ En $x = 0$, $\dfrac{d^2V}{dx^2}(0) = -1 < 0$

↳ équilibre instable.

En $x = \pi$, $\dfrac{d^2V}{dx^2}(\pi) = +1 > 0$

↳ équilibre stable.

Conclusions

* Le point x_0 est un point d'équilibre lorsque $\boxed{\frac{dV}{dx}(x_0) = 0}$

* Stabilité ?

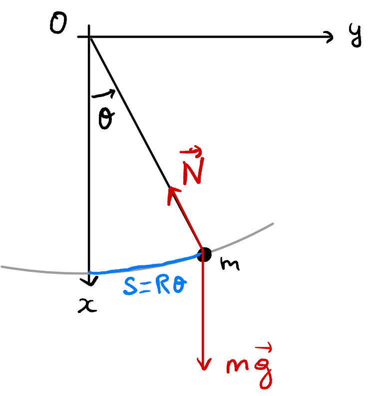
  * $\frac{d^2V}{dx^2}(x_0) > 0 \Rightarrow$ équilibre stable (force de rappel)
  * $\frac{d^2V}{dx^2}(x_0) < 0 \Rightarrow$ équilibre instable

* Lorsque l'équilibre stable, les oscillations autour de cette équilibre ont une pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}}$ (valide pour des petites amplitudes)

  où $$\boxed{k_{eff} = \frac{d^2V}{dx^2}(x_0)}$$

Exemple : pendule rigide

Positions d'équilibre ?
Fréquence d'oscillation ?



- Système : point matériel, masse m
- Référentiel : terrestre (galiléen)
- Repère : Oxy (cartésien)
- Forces : pesanteur $m\vec{g}$
  tension (liaison) $\vec{N}$

Hypothèse : pas de frottement

↳ Conséquence : $E = K + V$ = constante

Energie potentielle de pesanteur : $V(x) = -mgx = \boxed{-mgR\cos\theta}$

vérification : $\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dx}\hat{e}_x = mg\,\hat{e}_x$ ✓

<u>Equilibre</u> : on cherche θ_{eq} tel que $\frac{dV}{d\theta}(\theta_{eq}) = 0$

$\frac{dV}{d\theta} = + mgR \sin\theta \longrightarrow$ nul pour $\theta_{eq} = 0$ ou π $\quad \boxed{\theta_0 = 0 \ , \ \theta_\pi = \pi}$

<u>Stabilité ?</u> $\frac{d^2V}{d\theta^2} = mgR \cos\theta \rightarrow \boxed{\frac{d^2V}{d\theta^2}(\theta_0) = mgR} > 0 \rightarrow$ stable

Joule $\quad [\theta] = \frac{m}{m}$ (angle)

$\frac{d^2V}{d\theta^2}(\theta_\pi) = -mgR < 0 \rightarrow$ instable

<u>Oscillation autour de θ_0 ?</u>

Attention : dimension de k_{eff} doit être $J.m^{-2}$ car $\underset{J}{V(x)} = \frac{1}{2} k_{eff} \underset{m}{x^2}$

On doit calculer $\frac{d^2V}{ds^2}$ où $s = R\theta$ donc $ds = R\,d\theta$ $\rightarrow \boxed{\frac{d^2V}{ds^2} = \frac{1}{R^2}\frac{d^2V}{d\theta^2}}$

$\frac{1}{ds} = \frac{1}{R}\frac{1}{d\theta}$

$\left(\frac{d^2V}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{dV}{ds}\right] \right)$ rappel

$\hookrightarrow \frac{d^2V}{ds^2} = \frac{1}{R^2} mgR \cos\theta$ donc en θ_0 : $\boxed{k_{eff} = m\frac{g}{R}}$ car proche

de θ_0 le potentiel vaut $V(s) \approx c^{ste} + \frac{1}{2} k_{eff} (\delta s)^2$

↑ déplacement par rapport à équilibre

<u>Pulsation propre</u> autour de $\theta_0 = 0$: $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \sqrt{\frac{g}{R}}}$

<u>Intégrale première ?</u>

En utilisant $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ en coordonnées cylindriques on trouve :

$m R \ddot{\theta} = -mg \sin\theta \quad (\times \dot{\theta})$

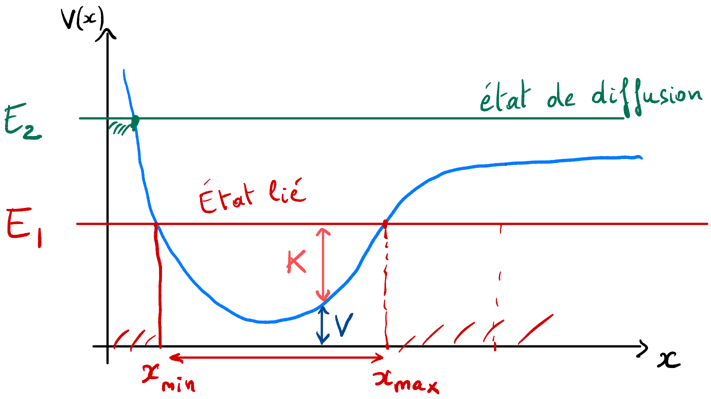
$m R \dot{\theta}\ddot{\theta} + mg(\sin\theta)\dot{\theta} = 0$

$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{m\frac{1}{2}R\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta}_{\text{constante}}\Big] = 0$ $\quad$ si on multiplie R (constante)

on obtient $\underbrace{m\frac{1}{2}R^2\dot{\theta}^2}_{K} \underbrace{- mgR\cos\theta}_{V} = E$

$\theta = \frac{s}{R}$

VII) Mouvement dans un potentiel : états liés / états non liés



$E_1 = K + V \Rightarrow K = E - V > 0$

E tjs audessus de V

énergie mécanique (conservée)

VIII) Théorème de l'énergie en présence de frottements

Considérons un point matériel soumis à des forces conservatives $\vec{F}_c$ et non-conservatives $\vec{F}_{NC}$

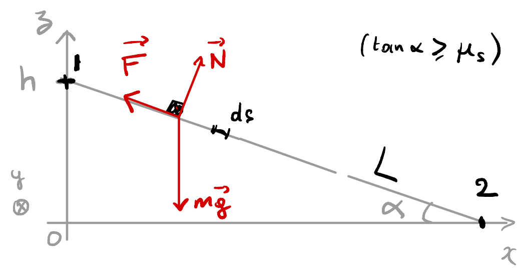
Entre deux points 1 et 2 :

$$K_2 - K_1 = W_{12} = \int_1^2 \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r}$$

$$= V_1 - V_2 + W_{12}^{NC}$$

Donc $\boxed{E_2 - E_1 = W_{12}^{NC} \quad \text{où} \quad W_{12}^{NC} = \int_1^2 \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r}}$ ou encore $\boxed{\dfrac{dE}{dt} = P_{NC}}$

où $P_{NC} = \vec{F}_{NC} \cdot \vec{v}$



Exemple : Luge glissant avec frottement

↳ Vitesse finale de la luge ?

L = longueur entre 1 et 2

Système : pt. mat. m

Réf : terrestre

Rep : Oxyz

Forces : Poids $m\vec{g}$ (conservative)

Liaison $\vec{N}$ (ne travaille pas)

Frottement sec : $\vec{F} = -\mu_c N \hat{\tau} \left(= -\mu_c N \dfrac{\vec{v}}{v} \right)$

Th de l'énergie : $E_2 - E_1 = W_{12}^{NC} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$

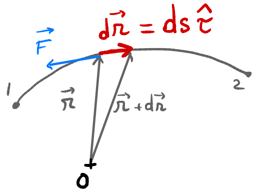
Au point ① $E_1 = mgh$

Au point ② $E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = mgh \\ E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 \end{array}\right\} \boxed{\frac{1}{2} m v_2^2 - mgh = W_{12}^{NC}}$$

$$W_{12}^{NC} = \int_1^2 -\mu_c N \underbrace{\hat{\tau} \cdot d\vec{r}}_{= \hat{\tau} \cdot ds\, \hat{\tau} = ds}$$

$$= -\mu_c \int_1^2 N\, ds$$

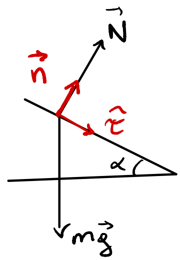


s = abscisse curviligne

$\hat{\tau}$ = vecteur unitaire tangent

↳ $d\vec{r} = ds\,\hat{\tau}$

Il nous reste à trouver N



Contrainte → accélération selon $\vec{n}$ est nulle $(\vec{a} \cdot \vec{n} = 0)$

2ème loi projetée selon $\vec{n}$: $0 = N - mg\cos\alpha$ donc $\boxed{N = mg\cos\alpha}$

constante !

Donc $W_{12}^{NC} = -\mu_c\, mg\cos\alpha \int_1^2 ds = -\mu_c\, mg\cos\alpha\, L$ où $L = \frac{h}{\sin\alpha}$

$$\boxed{W_{12}^{NC} = -\mu_c\, mg \frac{h}{\tan\alpha}}$$

Finalement : $\frac{1}{2} m v_2^2 - mgh = -\mu_c\, mg \frac{h}{\tan\alpha}$

$$\boxed{v_2 = \pm \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha}\right)}}$$

* Cas limite $\mu_c = 0$: $v_2 = \sqrt{2gh}$

* Vérifions que $1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha} > 0$ en effet $\tan\alpha > \mu_s > \mu_c$

donc $\frac{\mu_c}{\tan\alpha} < 1$ ok