RAQ
24/10

$(G,\cdot)$ X ensemble

$$\langle X\rangle := \bigcap_{\substack{\text{ssgpes} \\ H \supset X}} H$$ ssgpe de G contenant X et le plus petit possible

$$\langle X\rangle = \left\{ x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varepsilon_n} \text{ avec } \begin{array}{l} n \geq 1 \\ x_i \in X \\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \end{array} \right\}$$

$\langle X \rangle'$ contient $X = \{ x_1^{\pm 1} \quad x_1 \in X \}$

$\langle X \rangle'$ est un ssgpe de G

(utilise le critère de ssgpe)

$W \in \langle X \rangle'$ $\quad W = x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\varepsilon_m} \quad m \geq 1$

$W' \in$ $\quad W' = x_1'^{\varepsilon_1'} \cdot \ldots \cdot x_n'^{\varepsilon_n'} \quad n \geq 1$

? $W \cdot (W')^{-1} \in \langle X \rangle'$ $\quad (W')^{-1} = x_n'^{-\varepsilon_n'} \cdot x_{n-1}'^{-\varepsilon_{n-1}'} \cdots x_1'^{-\varepsilon_1'}$

Donc $\langle X \rangle' \supset \langle X \rangle$

$\langle X \rangle' \subset \langle X \rangle$

si $x_1, \ldots, x_n \in X \subset \langle X \rangle$ comme $\langle X \rangle$ est un ssgpe
$x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}$ et également le produit
$x_1^{\pm 1} \cdot x_2^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\pm 1}$

$\Longrightarrow \langle X \rangle' = \langle X \rangle$

Si $\varphi : K \to B$ $\varphi \neq 0_B$

φ est injective $\varphi : K \hookrightarrow B$

et φ est surjective de K vers $\varphi(K) \subset B$

$\Rightarrow$ φ est bijective de K vers $\varphi(K)$

et $\Rightarrow$ φ^{-1} est un morphisme d'anneau bijective

$\varphi(K) \xrightarrow{\sim} K$

φ est un isom d'anneau de K vers $\varphi(K)$

A general $\quad a, b \in A$ tq

$$a \cdot b = 0_A.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_2(A)$ n'est pas intègre.

Exercice 9 Serie 4 :

$\varphi : M \to N$ B famille generatrice de M

tout elt de M est CL a coefs dans A d'elements de B : $m \in M$ il existe $n \geq 1$ $a_1, \ldots, a_n \in A$ $e_1, \ldots, e_n \in B$ tq

$$m = a_1 . e_1 + a_2 . e_2 + \ldots + a_n . e_n$$

$$\varphi(m) = \varphi(a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \dots + a_n \cdot e_n)$$

$$= a_1 \varphi(e_1) + a_2 \varphi(e_2) + \dots + a_n \varphi(e_n)$$

$\Rightarrow$ on connait la valeur de $\varphi(m)$ dès qu'on connait les valeurs $\varphi(e_1), \dots \varphi(e_n)$ (et l'expression de m en CL d'elts de B)

$\Rightarrow$ si on connait tout les $\varphi(e)$ $e \in B$ on peut calculer $\varphi(m)$ pour tout $m \in M$.

2 méthodes : soit φ, et φ' tq $\forall e \in B$

$$\varphi(e) = \varphi'(e)$$

soit $m \in M$ alors $m = a_1 . e_1 + \dots + a_n . e_n$

$$\varphi(m) = a_1 \varphi(e_1) + \dots + a_n . \varphi(e_n)$$

$$\varphi'(m) = a_1 \varphi'(e_1) + \dots + a_n . \varphi'(e_n)$$

comme $\varphi(e_i) = \varphi'(e_i)$ $i = 1 \dots n$

$$\forall m \in M \quad \varphi'(m) = a_1\varphi(e_1) + \cdots + a_n\varphi(e_n)$$

$$= \varphi(m)$$

$$\varphi = \varphi'.$$

- on considère $\varphi - \varphi' \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$

$\psi := \varphi - \varphi'$ est une application A-linéaire.

On veut mq $\psi = 0_N = \varphi - \varphi'$

$\ker(\psi) = \{ m \text{ tq } \psi(m) = 0_N = \varphi(m) - \varphi'(m) \}$

$= \{ m \in M \text{ tq } \varphi(m) = \varphi'(m) \}$

On sait que $B \subset \ker(\varphi - \varphi')$

Comme $\ker(\varphi-\varphi')$ est un ss A-module de M $\ker(\varphi-\varphi') \supset \langle B \rangle_A$

A module engendré par B

Comme B est génératrice

$$\langle B \rangle_A = M$$

et $M \subset \ker(\varphi - \varphi') \subset M$

$$M = \ker(\varphi - \varphi')$$

$$\Rightarrow \varphi - \varphi' = \underline{0}_N$$

2. $M = N = \mathbb{Z}^2$ $B = \{(1,1), (1,2)\}$

on cherche φ tq

$\varphi(1,1) = (1,3)$ $\varphi(1,2) = (3,1)$

On sait par 1. que φ est unique

car B est génératrice $1.1 - 1.2 = -1$

$\in$

$\mathbb{Z}^\times$

$$(0,1) = -(1,1) + (1,2)$$

$$(1,0) = 2(1,1) - (1,2)$$

Si φ existe

$$\varphi(1,0) = 2\varphi(1,1) - \varphi(1,2)$$
$$= 2(1,3) - (3,1) = (-1,5)$$
$$\varphi(0,1) = -\varphi(1,1) + \varphi(1,2) = -(1,3) + (3,1)$$
$$= (2,-2)$$

$$\varphi(m,n) = m\,\varphi(1,0) + n\,\varphi(0,1)$$

$$(m,n) = m(1,0) + n(0,1)$$

$$\varphi(m,n) = m(-1,5) + n(2,-2)$$
$$= (-m+2n,\ 5m-2n)$$

Pour mq φ existe on defini φ en posant $\varphi(m,n) = \ldots\ldots$

et on calcule

$$\varphi(1,1) = (1,3)$$

$$\varphi(1,2) = (3,1)$$

φ existe.