EPFL Lénaïc Chizat

Sections MX-SC-CGC 31 octobre 2022

Analyse I – Série 6

Exercice 1. (Règle de d'Alembert pour les suites)

Démontrer la règle de d'Alembert pour la convergence des suites (voir le chapitre 3 du cours).

Exercice 2. (Limites de suites définies par récurrence)

Soient $a_1 \in \mathbb{R}$ et la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par $a_n = g(a_{n-1})$ pour $n = 2, 3, \dots$. Montrer la convergence et calculer la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$ pour

a) $g(x) = \dfrac{1}{4}(3x+1)$, $\quad a_1 = 0$

b) $g(x) = \dfrac{1}{4}(x+4)$, $\quad a_1 = 3$

c) $g(x) = \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{1+x}$, $\quad a_1 = 1$

d) $g(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x$, $\quad a_1 = \frac{3}{2}$

Exercice 3. (Exemples de suites) Donner un exemple dans chacune des situations suivantes :

1. une suite décroissante positive dont le terme général ne tend pas vers 0.

2. une suite bornée non convergente.

3. une suite positive non bornée ne tendant pas vers $+\infty$

4. une suite non monotone qui tend vers 0.

5. une suite positive qui tend vers 0 et qui n'est pas décroissante.

Exercice 4. (V/F : Limite inférieure et supérieure)

Soient (a_n) et (b_n) des suites numériques. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

	V	F
a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = a$, alors $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -a$.	☐	☐
b) Si $\limsup\limits_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = 0$, alors (a_n) converge vers zéro.	☐	☐
c) Si $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $a_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	☐	☐
d) Si $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, alors $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.	☐	☐

Exercice 5. (V/F : Suite à valeurs absolues décroissantes)

Soit (a_n) une suite numérique telle que $\lvert a_{n+1}\rvert < \lvert a_n\rvert$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

	V	F
a) Alors $(\lvert a_n\rvert)$ converge.	☐	☐
b) Alors (a_n) converge.	☐	☐
c) Alors (a_n) a une sous-suite convergente.	☐	☐
d) Alors $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n^2$.	☐	☐
e) Alors (a_n) a au plus deux points d'accumulation.	☐	☐

Exercice 6. (Calcul de lim Inf/lim Sup)

Soient $u_n = \frac{n+1}{n}\cos(\frac{n\pi}{2})$ et $v_n = \frac{n-1}{n}\sin(\frac{n\pi}{2})$. Calculer $\limsup_{n\to\infty} u_n$, $\liminf_{n\to\infty} u_n$, $\limsup_{n\to\infty} v_n$, $\liminf_{n\to\infty} v_n$, $\limsup_{n\to\infty}(u_n+v_n)$, $\liminf_{n\to\infty}(u_n+v_n)$.

Echauffement 1. (Série géométrique)

Discuter la convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ en utilisant

a) le critère de d'Alembert,
b) le critère de Cauchy.

Exercice 6. (Convergence de séries)

Déterminer si la série donnée converge ou diverge (pour les expressions faisant intervenir des racines $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, tenter de multiplier par la quantité conjuguée $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ au numérateur et dénominateur) :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n+5}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+7}-n\right)$ e) (*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}$

g) (*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$

Exercice 7. (Sommes de séries)

i) $-\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$

ii) $\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

Exercice 8.(*) (Critères de convergence)

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Montrer que l'application des critères de Cauchy et de d'Alembert à cette série correspond à utiliser le critère de comparaison avec des séries géométriques adéquates.

Exercice 9. (V/F : Séries)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique.	V	F
a) Si $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.	☐	☐
b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.	☐	☐
c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.	☐	☐
d) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, alors $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.	☐	☐
e) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.	☐	☐
f) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.	☐	☐
g) La série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.	☐	☐