EPFL — Lénaïc Chizat
Sections MX-SC-CGC — 31 octobre 2022

Analyse I – Série 6

Exercice 1. (Règle de d'Alembert pour les suites)

Démontrer la règle de d'Alembert pour la convergence des suites (voir le chapitre 3 du cours).

Sol. :
Supposons que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$. Ceci veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \rho\right| \leq \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall n \geq n_0, \quad \rho - \varepsilon \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \rho + \varepsilon \tag{1}$$

Cas $\rho > 1$. Dans ce cas on choisit ε tel que $\rho_1 := \rho - \varepsilon > 1$ $\left(\text{ par exemple } \varepsilon = \frac{\rho-1}{2}\right)$ et on obtient de (1) que

$$\forall n \geq n_0, \quad 1 < \rho_1 \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall n \geq n_0, \quad |a_{n+1}| \geq \rho_1 |a_n| \quad \text{ avec } \rho_1 > 1.$$

Par récurrence on trouve que

$$|a_{n+1}| \geq \rho_1^{n+1-n_0} |a_{n_0}|$$

et donc $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| = \infty$. La suite est donc non bornée ce qui exclut la convergence car toute suite convergente est bornée.

Cas $\rho < 1$. Dans ce cas on choisit ε tel que $\rho_1 := \rho + \varepsilon < 1$ $\left(\text{ par example } \varepsilon = \frac{1-\rho}{2}\right)$ et on obtient de (1) que

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \rho_1 < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall n \geq n_0, \quad |a_{n+1}| \leq \rho_1 |a_n| \quad \text{ avec } \rho_1 < 1.$$

Par récurrence on trouve que

$$|a_{n+1}| \leq \rho_1^{n+1-n_0} |a_{n_0}|$$

et donc $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| = 0 \quad (= \lim_{n\to\infty} |a_n|)$. Ceci implique que $\forall \varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \quad |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$ et donc $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Cas $\rho = 1$. Le critère ne donne aucun résultat.

Exercice 2. (Limites de suites définies par récurrence)

Soient $a_1 \in \mathbb{R}$ et la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par $a_n = g(a_{n-1})$ pour $n = 2, 3, \dots$. Montrer la convergence et calculer la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$ pour

a) $g(x) = \dfrac{1}{4}(3x+1)\ , \quad a_1 = 0$

b) $g(x) = \dfrac{1}{4}(x+4)\ , \quad a_1 = 3$

c) $g(x) = \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{1+x}\ , \quad a_1 = 1$

d) $g(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x\,, \quad a_1 = \frac{3}{2}$

Sol.:

Il faut d'abord trouver la valeur de la limite sous l'hypothèse que celle-ci existe et ensuite démontrer la convergence de la suite. Pour la première étape, il faut passer à la limite dans l'équation qui définit la récurrence de la suite en utilisant les propriétés algébriques de la limite.

a) *Si la limite* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *existe, on a*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}(3a_{n-1}+1)\right) = \frac{1}{4}\left(3\lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \lim_{n\to\infty} 1\right),$$

d'où l'équation $a = \frac{1}{4}(3a+1)$*, et donc* $a = 1$.
On montre par récurrence que la suite est majorée par a *: On a* $a_1 = 0 \leq a$*, et si* $a_{n-1} \leq a$*, alors*

$$a_n = \frac{1}{4}\left(3a_{n-1}+1\right) \leq \frac{1}{4}\left(3a+1\right) = 1 = a\,.$$

On montre que la suite est croissante. Pour $n = 2, 3, \ldots$ *on a*

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{4}\left(1 - a_{n-1}\right) \geq \frac{1}{4}\left(1-a\right) = 0 \qquad \textit{car} \quad a_{n-1} \leq a\,.$$

Ainsi la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ *est convergente (car croissante et majorée) et sa limite vaut* $a = 1$.

b) *Si la limite* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *existe, elle satisfait* $a = \frac{1}{4}(a+4)$ *(obtenue comme au i), donc* $a = \frac{4}{3}$.
On montre par récurrence que la suite est minorée par a *: On a* $a_1 = 3 \geq a$*, et si* $a_{n-1} \geq a$*, il s'en suit que*

$$a_n = \frac{1}{4}(a_{n-1}+4) \geq \frac{1}{4}(a+4) = \frac{4}{3} = a\,.$$

On montre que la suite est décroissante. Pour $n = 2, 3, \ldots$ *on a*

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{4}\left(4 - 3a_{n-1}\right) \leq \frac{1}{4}\left(4 - 3a\right) = 0 \qquad \textit{car} \quad a_{n-1} \geq a\,.$$

Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ *est convergente avec limite* $a = \frac{4}{3}$.

Remarque : Les fonctions g dans i+ii) étant affines, ces deux exercices pourraient aussi être résolus directement en utilisant le théorème vu en cours (à propos des suites définies par récurrence linéaire). Mais la solution présentée ici est un bon exercice de compréhension.

c) *Si la limite* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *existe, elle satisfait l'équation (utiliser les propriétés algébriques comme précédemment)*

$$a = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \left(\frac{7}{3} - a\right)\left(1+a\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3}a - a^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$3a^2 - 4a - 4 = (3a+2)(a-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2 \textit{ ou } a = -\frac{2}{3}.$$

On montre par récurrence que $a_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a* $a_1 = 1 \geq 0$. *Si* $a_{n-1} \geq 0$*, alors*

$$a_n = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a_{n-1}} \geq \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3} \geq 0.$$

Ainsi la seule limite possible est $a = 2$.
On montre alors (encore par récurrence) que la suite est majorée par $a = 2$. *On a* $a_1 = 1 \leq a$. *Si* $0 \leq a_{n-1} \leq a$*, on a alors*

$$a_n = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a_{n-1}} \leq \frac{7}{3} - \frac{1}{1+a} = 2 = a\,.$$

Montrons que la suite est croissante. Pour $n = 2, 3, \ldots$ *on a*

$$a_n - a_{n-1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{1 + a_{n-1}} - a_{n-1} \geq \frac{7}{3} - \frac{1}{1 + a} - a = 0 \qquad \textit{car} \quad 0 \leq a_{n-1} \leq a\,.$$

En étant croissante et majorée, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ *est donc convergente avec limite* $a = 2$.

d) *Si la limite* $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *existe, elle satisfait l'équation*

$$a = 1 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a\,, \tag{2}$$

parce qu'en utilisant les propriétés algébriques de la limite, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2}a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}a_{n-1}\right) &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_{n-1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\right)^2 - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\,.\end{aligned}$$

L'équation (2) *est équivalente à*

$$a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2) = 0\,,$$

donc $a = 1$ *ou* $a = 2$.
On a

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = 1 + \frac{9}{8} - \frac{3}{4} = \frac{11}{8} < \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = a_1\,.$$

Montrons par récurrence que la suite est minorée par 1. *On a*

$$a_1 = \frac{3}{2} \geq 1\,,$$

et si $a_{n-1} \geq 1$, *il suit que*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}a_{n-1} = 1 + \frac{1}{2}a_{n-1}\left(a_{n-1} - 1\right) \geq 1\,.$$

Montrons par récurrence que la suite est décroissante. On a déjà montré que $a_2 \leq a_1$.
Supposons donc $a_n \leq a_{n-1}$. *Puisque la suite est minorée par* 1, *on obtient*

$$0 \leq a_n - 1 \leq a_{n-1} - 1\,,$$

et donc

$$a_n(a_n - 1) \leq a_{n-1}(a_{n-1} - 1)\,,$$

et finalement

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n^2 - \frac{1}{2}a_n = 1 + \frac{1}{2}a_n(a_n - 1) \leq 1 + \frac{1}{2}a_{n-1}(a_{n-1} - 1) = a_n\,.$$

La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ *est donc décroissante et minorée. Ainsi elle est convergente et sa limite est* $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Exercice 3. (Exemples de suites) Donner un exemple dans chacune des situations suivantes :

1. une suite décroissante positive dont le terme général ne tend pas vers 0.

2. une suite bornée non convergente.

3. une suite positive non bornée ne tendant pas vers $+\infty$

4. une suite non monotone qui tend vers 0.

5. une suite positive qui tend vers 0 et qui n'est pas décroissante.

Sol. *:*
Les suites dont le terme général est donné ci-dessous pour $n \geq 0$ satisfont les propriétés demandées dans les cas suivants :

1. $a_n = 1$, $b_n = \pi + 1/n^2$, *...*

2. $a_n = \cos(2\pi n/3)$, $b_n = (-1)^n$, $c_n = 1$ *si* n *est premier et* $c_n = 0$ *sinon,...*

3. $a_n = \max\{n\cos(2\pi n/3), 0\}$, $b_n = \sqrt{n}$ *si* n *est pair et* $b_n = 1$ *sinon,...*

4. $a_n = (-1)^n/n$, $b_n = 1/n$ *si* n *est pair et* $b_n = 0$ *sinon,...*

5. $a_n = 1/n$ *si* n *est pair et* $a_n = 0$ *sinon*

Exercice 4. (V/F : Limite inférieure et supérieure)

Soient (a_n) et (b_n) des suites numériques. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

	V	F
a) Si $\lim_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = a$, alors $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n = -a$.	☐	☐
b) Si $\limsup_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = 0$, alors (a_n) converge vers zéro.	☐	☐
c) Si $\limsup_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $a_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	☐	☐
d) Si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} b_n = 0$, alors $\limsup_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.	☐	☐

Sol.:

a) FAUX.
Prendre par exemple la suite constante $a_n = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors* $1 = \lim_{n\to\infty} |a_n| = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

b) VRAI.
Comme $0 \leq \liminf_{n\to\infty} |a_n| \leq \limsup_{n\to\infty} |a_n|$, *on a* $\liminf_{n\to\infty} |a_n| = \limsup_{n\to\infty} |a_n| = 0$. *Ainsi* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *et donc* (a_n) *converge vers zéro aussi.*

c) FAUX.
Prendre par exemple $a_n = \frac{1}{n} \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Alors* $\operatorname{Sup} A_n = \operatorname{Sup}\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\right\} = \frac{1}{n}$ *(cf. cours pour les détails), d'où* $\limsup_{n\to\infty} a_n = 0$.

d) FAUX.
Prendre par exemple $a_n = (-1)^n - 1$ *et* $b_n = (-1)^n + 1$. *Alors* $\operatorname{Sup} A_n = \operatorname{Sup}\{0, -2\} = 0$ *et* $\operatorname{Inf} B_n = \operatorname{Inf}\{2, 0\} = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *mais* $a_n - b_n = -2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. (V/F : Suite à valeurs absolues décroissantes)

Soit (a_n) une suite numérique telle que $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

	V	F
a) Alors $(\lvert a_n\rvert)$ converge.	☐	☐
b) Alors (a_n) converge.	☐	☐

c) Alors (a_n) a une sous-suite convergente. ☐ ☐

d) Alors $\liminf_{n\to\infty} a_n^2 = \limsup_{n\to\infty} a_n^2$. ☐ ☐

e) Alors (a_n) a au plus deux points d'accumulation. ☐ ☐

Sol.:

a) VRAI.
$(|a_n|)$ est décroissante et minorée par 0.

b) FAUX.
Prendre par exemple $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 = 3$. Comme cette suite alterne ($a_n a_{n+1} < 0$) et que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$, elle ne converge pas.

c) VRAI.
$(|a_n|)$ est bornée puisque $|a_n| < |a_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(a_n) \subset]-|a_0|, |a_0|[$ est aussi bornée. Par le théorème de Bolzano–Weierstrass, toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

d) VRAI.
Comme $(|a_n|)$ converge (cf. Q1), la suite des carrés (a_n^2) converge aussi : $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty} |a_n|^2 = \left(\lim_{n\to\infty} |a_n|\right)^2$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \liminf_{n\to\infty} a_n^2 = \limsup_{n\to\infty} a_n^2$.

e) VRAI.
Si a est un point d'accumulation, il existe une sous-suite (a_{n_k}) de (a_n) telle que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Comme $\left||a_{n_k}| - |a|\right| \le |a_{n_k} - a|$ (2e inégalité triangulaire), il suit que $\lim_{k\to\infty} |a_{n_k}| = |a|$.
Or, $(|a_{n_k}|)$ est une sous-suite de $(|a_n|)$ et on sait par la Q1 que cette dernière converge. Soit donc $\ell = \lim_{n\to\infty} |a_n|$. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left||a_n| - \ell\right| < \varepsilon$ pour $n \ge n_0$. Comme $k \ge n_0$ implique $n_k \ge n_0$, on a $\left||a_{n_k}| - \ell\right| < \varepsilon$ pour $k \ge n_0$, d'où $\ell = |a|$ par unicité de la limite. Finalement $a = \pm\ell$, c.-à-d. a peut prendre au plus deux valeurs distinctes.

Exercice 6. (Calcul de lim Inf/lim Sup) Soient $u_n = \frac{n+1}{n}\cos(\frac{n\pi}{2})$ et $v_n = \frac{n-1}{n}\sin(\frac{n\pi}{2})$. Calculer $\limsup_{n\to\infty} u_n$, $\liminf_{n\to\infty} u_n$, $\limsup_{n\to\infty} v_n$, $\liminf_{n\to\infty} v_n$, $\limsup_{n\to\infty}(u_n+v_n)$, $\liminf_{n\to\infty}(u_n+v_n)$.

Sol. :
On remarque que

$$u_{4p} = \frac{4p+1}{4p},\ u_{4p+1} = 0,\ u_{4p+2} = -\frac{4p+3}{4p+2} \text{ et } u_{4p+3} = 0.$$

Ainsi, $\lim_{p\to\infty} u_{4p} = 1$, $\lim_{p\to\infty} u_{4p+1} = \lim_{p\to\infty} u_{4p+3} = 0$ et $\lim_{p\to\infty} u_{4p+2} = -1$. On en déduit que $\limsup_{n\to\infty} u_n = 1$ (c'est la plus grande limite d'une sous-suite de (u_n)) tandis que $\liminf_{n\to\infty} u_n = -1$.

On peut faire la même chose avec v_n pour trouver

$$v_{4p} = v_{4p+2} = 0,\ v_{4p+1} = \frac{4p}{4p+1} \text{ et } v_{4p+3} = \frac{4p+2}{4p+3}.$$

On obtient de même $\limsup_{n\to\infty} v_n = 1$ et $\liminf_{n\to\infty} v_n = -1$.

Enfin, combinant les deux calculs précédents, on trouve

$$u_{4p} + v_{4p} = \frac{4p+1}{4p},\ u_{4p+1} + v_{4p+1} = \frac{4p}{4p+1},\ u_{4p+2} + v_{4p+2} = -\frac{4p+3}{4p+2},\ \text{ et } u_{4p+3} + v_{4p+3} = -\frac{4p+2}{4p+3}.$$

Ainsi $\lim \operatorname{Sup}_{n\to\infty}(u_n+v_n) = 1$ et $\lim \operatorname{Inf}_{n\to\infty}(u_n+v_n) = -1$. En particulier, on a $\lim \operatorname{Sup}_{n\to\infty}(u_n+v_n) \neq \lim \operatorname{Sup}_{n\to\infty} u_n + \lim \operatorname{Sup}_{n\to\infty} v_n$.

Echauffement 1. (Série géométrique)

Discuter la convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ en utilisant

a) le critère de d'Alembert,
b) le critère de Cauchy.

Sol.:

a) Pour la série géométrique, le critère de d'Alembert s'écrit (pour $q \neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{q^{n+1}}{q^n}\right| = |q|.$$

Donc par le critère, la série géométrique converge absolument si $|q| < 1$ (la convergence absolue pour $q = 0$ est triviale) et diverge si $|q| > 1$. Si $|q| = 1$, la série diverge aussi, car $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

b) Le critère de Cauchy appliqué à la série géométrique s'écrit

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|q^n|} = |q|.$$

Donc par le critère, la série converge absolument pour $|q| < 1$ et diverge pour $|q| > 1$. Si $|q| = 1$, la série diverge aussi, car $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Exercice 6. (Convergence de séries)

Déterminer si la série donnée converge ou diverge (pour les expressions faisant intervenir des racines $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, tenter de multiplier par la quantité conjuguée $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ au numérateur et dénominateur) :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n+5}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+7}-n\right)$ e) (*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}$

g) (*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$

Sol.:

a) Par le critère de Cauchy, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n+2}{4n+5}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n+5} = \frac{3}{4} < 1.$$

b) Par le critère de d'Alembert, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^4}{3n^4}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{3n^4} = \frac{1}{3} < 1.$$

c) *Cette série converge par le critère de Leibniz. En effet,* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{3n-2}$ *satisfait les trois conditions de ce critère :*

- *le signe de* a_n *change avec la parité de* n*,*
- *la suite des valeurs absolues* $|a_n| = \dfrac{1}{3n-2}$ *est décroissante,*
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Noter que la série des valeurs absolues $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *ne converge pas parce que* $\dfrac{1}{3n-2} \geq \dfrac{1}{3n}$ *et que la série harmonique* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ *diverge.*

d) *On a*

$$\sqrt{n^2+7} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+7} - n\right)\left(\sqrt{n^2+7} + n\right)}{\sqrt{n^2+7}+n} = \frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n} .$$

Observons que pour $n > 3$*, on a* $n^2 + 7 < (n+1)^2$ *et donc*

$$\frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n} > \frac{7}{\sqrt{(n+1)^2}+n} > \frac{7}{3n} .$$

Comme la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{3n} = \dfrac{7}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ *diverge, la série initiale diverge aussi par le critère de comparaison.*

e) *On a*

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \overset{(1)}{=} 2\sin\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2 \overset{(2)}{\leq} 2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2(n+1)^2} < \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{n^2},$$

où on a utilisé la trigonométrie en $^{(1)}$ *et l'inégalité* $\sin(x) \leq x$ *pour* $x \geq 0$ *en* $^{(2)}$.
Comme la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\right)$ *converge (absolument) par le critère de comparaison.*

f) *Cette série diverge car* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2} = \dfrac{1}{7} \neq 0$ *(critère nécessaire).*

g) *On a pour tout* $n \geq 1$

$$0 < \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}{n} = \frac{4}{n(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})} < \frac{2}{n^{3/2}} .$$

Par le critère de comparaison, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$ *converge (absolument) car* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ *converge. Ceci se démontre comme pour la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ *: la suite des sommes partielles* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{3/2}}$ *est croissante et bornée car pour* $n = 2m(+1)$ *selon la parité*

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + \left(\frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}}\right) + \left(\frac{1}{4^{3/2}} + \frac{1}{5^{3/2}}\right) + \cdots + \begin{cases} \left(\frac{1}{(2m)^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}}\right), & n \text{ impair} \\ \frac{1}{(2m)^{3/2}}, & n \text{ pair} \end{cases} \\
&\leq 1 + 2\left(\frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{4^{3/2}} + \cdots + \frac{1}{(2m)^{3/2}}\right) \qquad \text{vrai dans les deux cas} \\
&\leq 1 + \frac{2}{2^{3/2}}\left(1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \cdots + \frac{1}{m^{3/2}}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, s_m \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, s_n
\end{aligned}$$

et donc $s_n \leq \dfrac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Exercice 7. (Sommes de séries)

i) $-\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + 1 = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

ii) $\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$.

Exercice 8.(*) (Critères de convergence)

Soit la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Montrer que l'application des critères de Cauchy et de d'Alembert à cette série correspond à utiliser le critère de comparaison avec des séries géométriques adéquates.

Sol.: *On distingue pour chacun des deux critères les cas de convergence et de divergence.*

Critère de Cauchy - cas convergent.
Le but est de trouver une suite (b_n) *de la forme* $b_n = Cq^n$ *avec* $|q| < 1$ *et* $C > 0$ *telle que* $|a_n| \leq b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho < 1$. *On choisit* q *tel que* $\rho < q < 1$ *(par exemple* $q = \frac{1+\rho}{2}$, *mais la valeur précise n'a pas d'importance ici). Puisque la limite* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *existe, on peut trouver un entier naturel* $n_0 \geq 1$ *tel que* $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ *pour tout* $n \geq n_0$ *(en effet, écrire la définition de la limite de* $\sqrt[n]{|a_n|}$ *pour* $\varepsilon = q - \rho > 0$*). Par conséquent on a*

$$|a_n| \leq q^n \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Il reste à choisir la constante $C > 0$ *de sorte que les termes* $|a_n|$ *pour* $n < n_0$ *soient aussi inférieurs au* b_n *correspondants, c.-à-d. que*

$$|a_0| \leq C, \quad |a_1| \leq Cq, \quad \ldots, \quad |a_{n_0-1}| \leq Cq^{n_0-1}$$

ce qui revient à choisir $C \geq \max\left\{1, |a_0|, \frac{|a_1|}{q}, \ldots, \frac{|a_{n_0-1}|}{q^{n_0-1}}\right\}$. *Ainsi on a*

$$|a_n| \leq b_n := Cq^n \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

ce qui implique la convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$, *car*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \lim_{n\to\infty} \left(C \sum_{k=0}^{n} q^k\right) = C \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{C}{1-q} \ .$$

Critère de Cauchy - cas divergent.
Dans ce cas on veut trouver (b_n) *avec* $|q| > 1$ *telle que* $|a_n| \geq b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho > 1$. *On choisit* q *tel que* $\rho > q > 1$. *Il existe un entier naturel* n_0 *tel que* $\sqrt[n]{|a_n|} > q$ *pour tout* $n \geq n_0$ *(écrire la définition de la limite pour* $\varepsilon = \rho - q > 0$*). Par conséquent on a*

$$|a_n| \geq q^n \quad \text{pour tout } n \geq n_0. \tag{3}$$

Pour avoir en plus

$$|a_0| \geq C, \quad |a_1| \geq Cq, \quad \ldots, \quad |a_{n_0-1}| \geq Cq^{n_0-1},$$

on pose $C = \min\left\{1, |a_0|, \frac{|a_1|}{q}, \ldots, \frac{|a_{n_0-1}|}{q^{n_0-1}}\right\}$. *Ainsi*

$$|a_n| \geq Cq^n \quad \textit{pour tout } n \geq 0$$

et donc la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *diverge parce que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \geq \lim_{n\to\infty} \left(C \sum_{k=0}^{n} q^k\right) = C \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty \ .$$

Remarque : Pour montrer la divergence de la série sans passer par le critère de comparaison, il suffit de constater à partir de (3) *que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. *Ainsi la série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *diverge parce que le critère nécessaire pour la convergence n'est pas satisfaite.*

Critère de d'Alembert - cas convergent.
La stratégie est la même que pour le cas convergent du critère de Cauchy.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho < 1$, *choisir* q *tel que* $\rho < q < 1$. *Il existe un entier naturel* n_0 *tel que* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ *pour tout* $n \geq n_0$ *(poser* $\varepsilon = \rho - q$*). Par conséquent on a pour tout* $n \geq n_0$

$$|a_n| \leq |a_{n-1}|\, q \leq |a_{n-2}|\, q^2 \leq \cdots \leq |a_{n_0}|\, q^{n-n_0} = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}\, q^n.$$

Pour les autres termes de la suite on doit de nouveau avoir

$$|a_0| \leq C, \quad |a_1| \leq Cq, \quad \ldots, \quad |a_{n_0-1}| \leq Cq^{n_0-1}$$

si bien qu'on doit choisir une constante $C \geq \max\left\{\frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}, |a_0|, \frac{|a_1|}{q}, \ldots, \frac{|a_{n_0-1}|}{q^{n_0-1}}\right\}$. *Ainsi*

$$|a_n| \leq b_n := Cq^n \quad \textit{pour tout } n \geq 0.$$

Ceci implique comme pour le critère de Cauchy la convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Critère de d'Alembert - cas divergent.
Même stratégie que pour le critère de Cauchy.

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho > 1$. *On choisit* q *tel que* $\rho > q > 1$. *Il existe un entier naturel* n_0 *tel que* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q$ *pour tout* $n \geq n_0$ *(poser* $\varepsilon = \rho - q > 0$*). Par conséquent on a pour tout* $n \geq n_0$

$$|a_n| \geq |a_{n-1}|\, q \geq |a_{n-2}|\, q^2 \geq \cdots \geq |a_{n_0}|\, q^{n-n_0} = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}\, q^n.$$

Pour avoir en plus

$$|a_0| \geq C, \quad |a_1| \geq Cq, \quad \ldots, \quad |a_{n_0-1}| \geq Cq^{n_0-1},$$

on pose $C = \min\left\{\frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}, |a_0|, \frac{|a_1|}{q}, \ldots, \frac{|a_{n_0-1}|}{q^{n_0-1}}\right\}$. *Ainsi*

$$|a_n| \geq Cq^n \quad \textit{pour tout } n \geq 0$$

et donc la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *diverge comme pour le critère de Cauchy.*

Exercice 9. (V/F : Séries)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique. V F

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ☐ ☐

b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ☐ ☐

c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge. ☐ ☐

d) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, alors $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge. ☐ ☐

e) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge. ☐ ☐

f) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge. ☐ ☐

g) La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge. ☐ ☐

Sol.:

a) VRAI.
Comme la série converge, on a $\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n = 0$ par le critère nécessaire. Ainsi $0 = \lim_{n\to\infty} |(-1)^n a_n| = \lim_{n\to\infty} |a_n|$. La proposition en suit par le théorème des deux gendarmes.

b) FAUX.
Prendre par exemple la suite $a_n = \frac{1}{n}$. Elle converge vers 0, mais on a vu au cours que la série harmonique diverge.
Noter que cet énoncé est la réciproque du critère nécessaire pour la convergence qui justement est seulement nécessaire mais pas suffisant.

c) VRAI.
Comme $|(-1)^n a_n| = |a_n|$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge par le critère de comparaison.

d) FAUX.
Prendre par exemple la suite $a_n = -n$ qui est strictement décroissante. Comme $(-1)^n a_n = (-1)^{n+1} n$ ne converge pas vers zéro, la série diverge.

e) FAUX.
Prendre par exemple la suite $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Par le critère de Leibniz, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Par contre $a_n^2 = \frac{1}{n}$ et on obtient la série harmonique qui diverge.

f) VRAI.
Comme $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|a_n| < 1$ pour tout $n \geq n_0$ (définition de la convergence avec $\varepsilon = 1$). Donc $|a_n|^2 < |a_n|$ pour tout $n \geq n_0$ et ainsi la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge par le critère de comparaison.
Remarque : Ici l'hypothèse du critère de comparaison n'est vérifiée que pour $n \geq n_0$ et pas pour tout n comme énoncé au cours. Cet assouplissement n'affecte pourtant pas la conclusion. En effet, on peut "découper" la série à $n = n_0$ en une somme d'un nombre fini de termes et une série commençant en n_0 qui converge par le critère de comparaison.

g) FAUX.
On a pour tout $n \geq 1$ que $\sqrt{n} \leq n$ et donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme la série harmonique diverge, on conclut par le critère de comparaison que la série en question diverge aussi.