Correction exercices communs

Question 1:

Donnez un exemple de suite $(a_n)_{n\geq 0}$ positive (dont tous les éléments sont ≥ 0) non bornée qui ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.

Une telle suite est donnée par la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n! & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

(• d'autres réponses sont bien entendu possibles
• aucune justification n'est demandée ici)

Question 1:

Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{j=1}^{n+1} j\, 2^j = n\, 2^{n+2} + 2$$

(1) • Soit $P(n)$ la propriété : « $\sum_{j=1}^{n+1} j 2^j = n 2^{n+2} + 2$ »

(2) • Initialisation :

On a $\sum_{j=1}^{1} j 2^j = 1 \cdot 2^1 = 2 = 0 \cdot 2^{0+2} + 2$

Donc $P(0)$ est vraie

(3) • Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+2} j 2^j &= \sum_{j=1}^{n+1} j 2^j + (n+2)\cdot 2^{n+2} \\ &= n 2^{n+2} + 2 + (n+2)\cdot 2^{n+2} \quad (\text{par } P(n)) \\ &= (2n+2)\cdot 2^{n+2} + 2 \\ &= (n+1) 2^{n+3} + 2 \end{aligned}$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

(4) • Conclusion : Par récurrence, on a $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.