Corrigé 7 : Énergie, moment cinétique, gravitation

1 Trajectoire circulaire, lois de Kepler

Plusieurs méthodes sont envisageables pour déterminer l'altitude du satellite. On peut par exemple exploiter la deuxième loi de Newton appliquée au satellite en tenant compte du fait que le mouvement est circulaire uniforme avec une accélération purement normale à la trajectoire. On peut également prendre comme point de départ la troisième loi de Kepler, le demi-grand axe de la trajectoire elliptique s'identifiant ici au rayon R_s de la trajectoire circulaire suivie par le satellite :

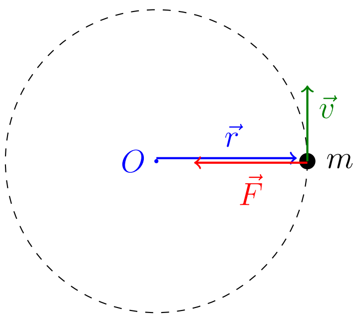
$$\frac{T^2}{R_\mathrm{s}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\mathrm{T}}\,.$$

La période T est le temps nécessaire au satellite pour parcourir un tour complet. Dans le cas d'un satellite géostationnaire, cette période est égale à la durée d'un jour sidéral. Connaissant le rayon de la Terre, R_T, l'altitude h_s cherchée a donc pour expression

$$\begin{aligned} h_\mathrm{s} &= R_\mathrm{s} - R_\mathrm{T} = \left(\frac{GM_\mathrm{T}T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_\mathrm{T} \\ &\cong \left(\frac{6.6732\cdot 10^{-11}\cdot 5.9742\cdot 10^{24}\cdot (23\cdot 3600 + 56\cdot 60 + 4)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - 6.3710\cdot 10^6 \\ &\cong 3.57956\cdot 10^7\,\mathrm{m} = 35795.6\,\mathrm{km}\,. \end{aligned}$$

2 Moment cinétique

1. Le mouvement est circulaire uniforme. La résultante $\vec{F}$ des forces s'exerçant sur l'objet de masse m est centrale (la situation est analogue à celle étudiée dans le premier exercice). Il paraît donc indiqué de choisir une origine O située au centre du cercle :



$$|\vec{v}| = \text{constante} = v_0 \quad \text{et} \quad |\vec{r}| = \text{constante} = r_0$$

Le moment cinétique par rapport au point O est donné par

$$\vec{L} = \vec{r}\wedge m\vec{v}\,.$$

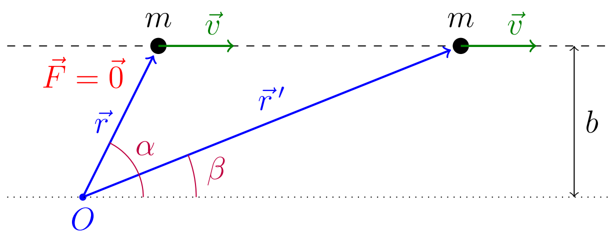
En tout point de la trajectoire, ce vecteur est perpendiculaire au plan de la trajectoire. Son sens est donné par la règle du tire-bouchon : $\odot\vec{L}$. De plus, sa norme est constante :

$$|\vec{L}| = m|\vec{r}||\vec{v}|\sin\alpha = mr_0v_0 \cdot 1 = mr_0v_0\,,$$

car le vecteur position $\vec{r}$ est, durant le mouvement, toujours perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$.

Remarquons que cette conclusion ($\vec{L}$ constant) n'est pas valable pour tout choix de l'origine O. En choisissant par exemple une origine située en-dessous du plan du cercle, on se convainc assez facilement que le vecteur moment cinétique n'est pas constant durant le mouvement.

2. Le mouvement est rectiligne uniforme. La résultante $\vec{F}$ des forces s'exerçant sur l'objet de masse m est donc nulle. Considérons l'objet de masse m à deux instants :



$$|\vec{v}| = \text{constante} = v_0 \quad \text{et} \quad |\vec{r}|\sin\alpha = b = |\vec{r}\,'|\sin\beta$$

Le moment cinétique par rapport au point O est donné par

$$\vec{L} = \vec{r}\wedge m\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{L}' = \vec{r}\,'\wedge m\vec{v}\,.$$

Ces vecteurs sont perpendiculaires au plan formé par la trajectoire et l'origine O, et leur sens est donné par la règle du tire-bouchon : $\otimes\vec{L}, \vec{L}'$. De plus, la norme du moment cinétique est constante :

$$|\vec{L}| = m|\vec{r}|v_0\sin\alpha = m\,b\,v_0 = m|\vec{r}\,'|v_0\sin\beta = |\vec{L}'|\,.$$

Remarquons que cette conclusion ($\vec{L}$ constant) reste vraie quelle que soit l'origine O choisie. Par exemple, dans le cas d'une origine située sur la trajectoire, le moment cinétique est constamment nul.

3 Force de gravitation, énergie potentielle

On suppose que la seule force appliquée à l'objet est la force de gravitation liée à la présence de l'astre (de la Terre). La vitesse de libération est la vitesse initiale nécessaire au corps pour rejoindre « un point infiniment éloigné » de l'astre de l'astre avec une vitesse finale nulle.

Comme la force de gravitation est conservative, l'énergie mécanique de l'objet est conservée. À un instant donné, cette énergie a pour expression :

$$E_{\text{méc.}} = E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}^{\text{grav.}} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{r} + C\,,$$

où m est la masse du corps, v est la vitesse de ce dernier, et r est la distance qui sépare le corps du centre de masse de l'astre. L'énergie potentielle de gravitation est définie à une constante arbitraire C près.

Ecrivons l'énergie mécanique que possède le corps à deux instants :

- Au moment où le corps quitte la surface de l'astre. Il possède alors une vitesse $\vec{v}_0$ (de norme $v_0 = ||\vec{v}_0||$) et se trouve à une distance $r = R$ du centre de masse de l'astre (R est le rayon de l'astre).
- Au moment où le corps est très éloigné de l'astre. Il possède alors une vitesse $\vec{v}_\infty \cong \vec{0}$ et se trouve à une distance $r \to \infty$ du centre de masse de l'astre.

La conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{R} + C}_{E_{\text{méc.}}\text{ à la surface de l'astre}} &= \underbrace{\frac{1}{2}mv_\infty^2 - \lim_{r\to\infty} G\frac{mM_{\text{astre}}}{r} + C}_{E_{\text{méc.}}\text{ très loin de l'astre}} \\ &= 0 + 0 + C. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{R} = 0\,,$$

et la vitesse initiale v_0 a pour expression :

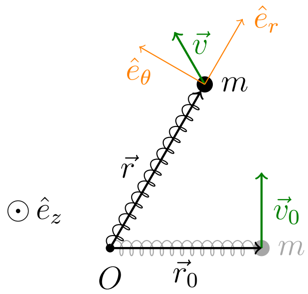
$$v_0 = \sqrt{\frac{2M_{\text{astre}}G}{R}}\,.$$

Numériquement, nous obtenons, dans le cas de la Terre,

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{2M_{\text{T}}G}{R_{\text{T}}}} \\ &\cong \sqrt{\frac{2 \cdot 5.9742 \cdot 10^{24} \cdot 6.6732 \cdot 10^{-11}}{6.3710 \cdot 10^{6}}} \cong 1.1187 \cdot 10^4\,\text{m}\,\text{s}^{-1} \cong 11\,\text{km}\,\text{s}^{-1}\,. \end{aligned}$$

On note que la vitesse v_0 ne dépend pas de la masse du corps. D'autre part, nous avons obtenu une vitesse de libération scalaire (et non pas vectorielle). Tout corps possédant cette vitesse v_0 est a priori susceptible d'échapper à l'attraction gravitationnelle de la Terre, et ce, quelle que soit la direction de sa vitesse initiale (pour autant évidemment que cette vitesse ne pointe pas en direction de l'astre). En pratique, il serait nécessaire d'affiner le calcul en tenant compte du frottement entre l'objet et l'atmosphère (traînée).

4 Mouvement dans un potentiel central



Les forces exercées sur l'objet sont son poids, le soutien de la table et la force élastique du ressort :

$$m\vec{g} + \vec{S} - k\vec{d} = m\vec{a}\,.$$

L'objet n'ayant pas de mouvement vertical, poids et soutien se compensent :

$$-k\vec{d} = m\vec{a}\,.$$

La force élastique est conservative et toujours dirigée vers O : c'est une force centrale. Par conséquent,

- l'énergie mécanique est conservée :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \forall\, t$$

- le moment cinétique par rapport à O est conservé :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0 = \ell_0 m v_0 \hat{e}_z \qquad \forall\, t\,,$$

  l'axe $\hat{e}_z$ étant dirigé vers le haut (donc sortant du plan de dessin).

Pour aller plus loin, la description du mouvement se fait le mieux en coordonnées cylindriques (ou polaires, car $z = \text{cte}$) :

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \qquad \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta\,.$$

Ainsi,

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z$$

et, avec

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\,,$$

et

$$L_O^2 = m^2 r^4 \dot{\theta}^2\,,$$

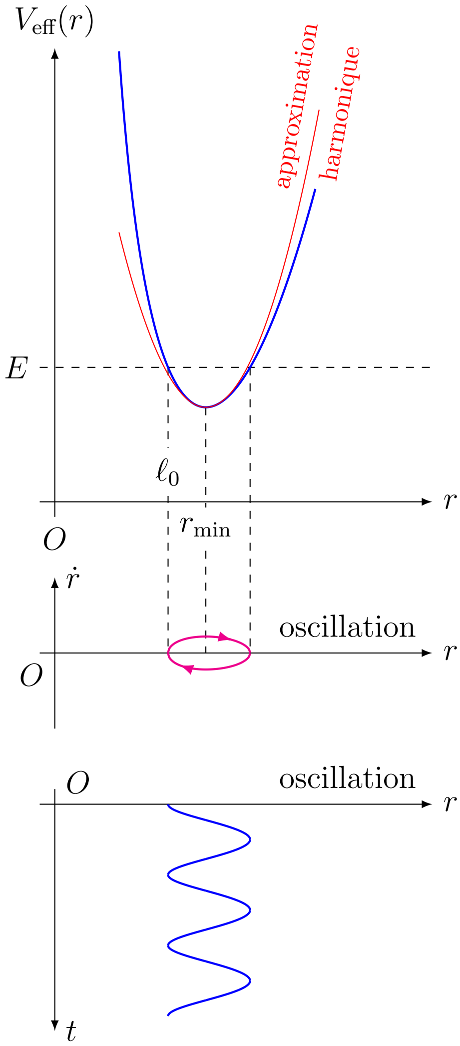
l'énergie s'écrit

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2.$$

C'est la conservation d'énergie mécanique d'un objet de masse m dans un potentiel effectif (à une dimension)

$$V_{\text{eff}} = \frac{L_O^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2.$$

Les orbites sont fermées : le rayon r fait une oscillation autour de $r_{\min}$ tel que $V'_{\text{eff}}(r_{\min}) = 0$.



Dans l'approximation harmonique, les fonctions $r(t)$ et $\theta(t)$ peuvent être données analytiquement. On obtient la trajectoire ci-dessous dans le plan de la table.