4.2 Critères de convergence pour les séries

- **Thm (Critère nécessaire).** $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge $\Rightarrow$ $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

  ⚠ L'implication réciproque est fausse : exemple avec $a_k = \frac{1}{k}$

- **Thm (Critère de Leibniz pour les séries "alternées").** Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite. Si :
  - (a_k) est alternée, c'est à dire que :
    $(-1)^k a_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ <u>ou</u> $(-1)^{k+1} a_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$.
  - $(|a_k|)$ est décroissante (c'est-à-dire $|a_{k+1}| \leq |a_k|, \forall k \in \mathbb{N}$)
  - $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

  Alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.

<u>Exemple</u> : série harmonique alternée

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$: converge par le critère de Leibniz

En effet
- $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est alternée
- $|a_k| = \frac{1}{k}$ est décroissante
- $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

fin cours 27/10

En revanche cette série ne converge pas absolument ($\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge)

Thm (critère de comparaison)

- Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq |a_k| \leq b_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument
- Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_k \leq a_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge.

Thm (critères de d'Alembert et Cauchy) (demonstration en série 6)

Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ avec $a_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Alors :

- si $\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = q \in \mathbb{R}$ (d'Alembert)

ou

- si $\lim_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k} = q \in \mathbb{R}$ (de Cauchy)

ou

- si $\limsup_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k} = q \in \mathbb{R}$ (critère de la lim-sup de Cauchy).
(à utiliser si la limite ci-dessus n'existe pas)

Alors :
- si $0 \leqslant q < 1$ alors la série converge absolument.
- si $q > 1$ alors la série diverge
- si $q = 1$ alors on ne peut pas conclure avec ce critère.

Exemple :

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k-4}{4k+5} \right)^k$

$$\lim_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{3k-4}{4k+5} \right| = \frac{3}{4} = q$$

On a $0 \leqslant q = \frac{3}{4} < 1$ donc par le critère de Cauchy, la série converge absolument.

Remarque : si plusieurs critères donnent une valeur pour q alors la valeur est la même

Exemple :

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + (-1)^k \frac{1}{4} \right)^k$

On a $\limsup_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k} = \limsup_{k \to +\infty} \left| \frac{1}{2} + (-1)^k \cdot \frac{1}{4} \right| = \frac{3}{4} =: q$

On a $0 \leqslant q = \frac{3}{4} < 1$ donc par le critère de la lim sup, la série converge absolument.

4.3 Séries avec un paramètre (exemples)

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{b^k}$ où $b \in \mathbb{R}^*$ un paramètre

$\rightsquigarrow$ la convergence dépend du paramètre b.

Etudions le critère de d'Alembert :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{(k+1)^2}{b^{k+1}}\frac{b^k}{k^2}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{|b|}\cdot\frac{(k+1)^2}{k^2} = \frac{1}{|b|} =: q$$

- Si $|b|>1$ alors $0<q<1$ donc la série converge absolument
- Si $|b|<1$ alors $q>1$ donc la série diverge.
- Pour $b=1$: la série est $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$

  $b=-1$: la série est $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2$

  → ces séries divergent car le terme général ne converge pas vers 0.

(ii) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$, où $x \in \mathbb{R}$ est un paramètre (convention: $0!=1$ et $x^0=1$)

Critère de d'Alembert :

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{x^k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\frac{|x|}{k+1} = 0 =: q < 1$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, la série converge absolument.

En fait $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}x^k = \exp(x)}$ (voir plus tard)

En particulier:

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} &= e = \exp(1) \;(\simeq 2{,}71\ldots)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\end{aligned}}$$

Chapitre 5 : fonctions réelles d'une variable réelle.

On s'intéresse aux fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}$ et $D \neq \emptyset$

__Convention :__ si le domaine D n'est pas donné, alors par convention D est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel la formule définissant f est bien définie.

__Exemples :__ $f(x) = \dfrac{2}{1-x^2} \rightsquigarrow D = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

__Fonctions polynômes :__ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ pour $n \in \mathbb{N}$ donné et $a_k \in \mathbb{R}$ données

$D(f) = \mathbb{R}$ (convention : $x^0 = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ donc $f(0) = a_0$)

__Fonctions rationnelles :__ $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ où p et q sont des polynômes

$$D = D(f) = \{x \in \mathbb{R},\ q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R},\ q(x) = 0\}$$

5.1 Définitions

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ (avec $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$) est :

- croissante si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- strictement croissante si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- décroissante si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- strictement décroissante si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- (strictement) monotone si elle est • soit (strictement) croissante.
  • soit (strictement) décroissante.

__Critère d'injectivité__ : Une fonction strictement monotone est injective.

[En effet si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$ et donc $f(x_1) \neq f(x_2)$.]

__Def__ : un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est symétrique (par rapport à zéro) si $\forall x \in X$ on a $-x \in X$.

__Exemples__ : • $[-1,2]$ ou $[-2,1]$ ne sont pas symétriques.
• $[-3,3]$ ou $[-5,-2[\,\cup\,]2,5]$ sont symétriques.

__Def__ : Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est __paire__ si D est symétrique et $\forall x \in D$, $f(-x) = f(x)$.

__Exemple__ : $f(x) = x^2$, $|x|$, $\cos(x)$, $\sin(x)^2$, 0, 1

__Def__ : Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est __impaire__ si D est symétrique et $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$

__Exemple__ : $f(x) = x^3$, $\arctan(x)$, $\frac{1}{x}$, x, $\sin(x)$, $\tan(x)$

5.2 Fonctions sh(x) (sinus hyperbolique) et ch(x) (cosinus hyperbolique)

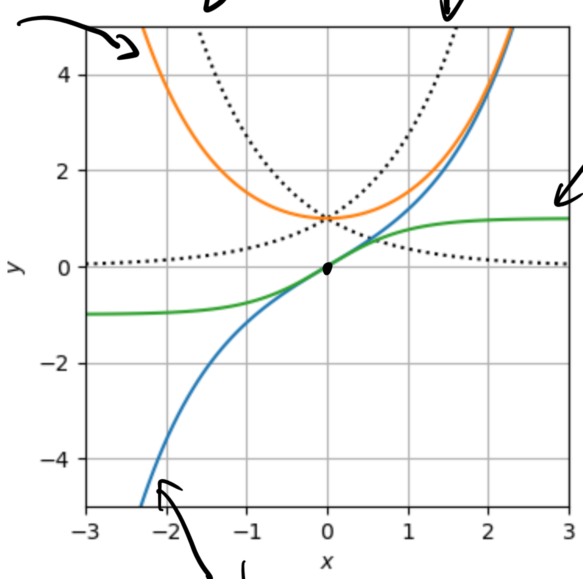
__Remarque__ : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec D symétrique. Alors on peut écrire $f = f_p + f_i$ avec f_p paire et f_i impaire. Explicitement :

$$\begin{cases} f_p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) & \text{(partie paire de } f\text{)} \\ f_i(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) & \text{(partie impaire de } f\text{)} \end{cases}$$

<u>Exemple</u> : $f(x) = e^x = ch(x) + sh(x)$ sur $D = \mathbb{R}$

avec
$$\begin{cases} ch(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) & \text{(partie paire de } e^x\text{)} \\ sh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) & \text{(partie impaire de } e^x\text{)} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : $ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$



$th(x) := \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$

$coth(x) := \dfrac{ch(x)}{sh(x)} = \dfrac{1}{th(x)}$

(étude des fonctions réciproques)

<u>Thm.</u> (Opérations algébriques).

Soient p_1, p_2 des fonctions paires, i_1 et i_2 des fonctions impaires définies sur un domaine symétrique D et $f : D(f) \to \mathbb{R}$ quelconque.

<u>Alors</u> :
$p_1 + p_2$ est paire

$p_1 \cdot p_2$ est paire

$i_1 + i_2$ est impaire

$i_1 \cdot i_2$ est paire

$p_1 \cdot i_1$ est impaire

$$\left.\begin{array}{ll} i_1 \circ i_2 & \text{est impaire} \\ f \circ p_1 & \text{est paire} \\ p_1 \circ i_1 & \text{est paire} \end{array}\right\}$$ là où la composition est bien définie.

fin cours 31.10.2022