

Analyse I – Série 7

Echauffement. (Périodicité)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique.

- a) La période de f est-elle toujours définie?
- b) Montrer que la fonction $|f|$ est aussi périodique.
- c) La réciproque de b) est-elle vraie?
- d) La période de $|f|$ est-elle égale à celle de f (si elle est définie)?

Exercice 1. (Convergence de séries avec un paramètre)

Etudier la convergence de la série en fonction de la valeur de $c \in \mathbb{R}$.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c}\right)^n, c \neq 1$ | b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n$ | c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n$ |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$ | e) $\sum_{n=1}^{\infty} (c-a)^n, a \in \mathbb{R}$ fixé | f) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+c^2)^n$ |

Quelle est la somme de la série c) lorsqu'elle converge?

Exercice 2. (Suite de sommes partielles)

Soit $0 < c < 1$, et posons pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = 1 + 2c + 3c^2 + \dots + nc^{n-1}.$$

- a) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $cS_n - S_n$.
- b) En déduire la somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} kc^{k-1}$.

Exercice 3. (Fonctions périodiques)

Donner le domaine de définition et étudier la parité et la périodicité des fonctions f suivantes en donnant la période le cas échéant :

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = \frac{x^4 \cos(3x)}{1 + \sin(x)^2}$ | b) $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ |
| c) $f(x) = \operatorname{tg}(3x) + \cos(\pi x)$ | d) $f(x) = (x - [x])^2$ |

Notation : $[x]$ est la partie entière du nombre réel x (c.-à-d. $[x] \in \mathbb{Z}$ tel que $[x] \leq x < [x] + 1$).

Exercice 4. (Fonctions monotones)

Soient les fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Déterminer la monotonie de leur composée $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si

- a) f et g sont croissantes,

- b) f et g sont décroissantes,
- c) f est croissante et g est décroissante.

Qu'en est-il de la monotonie de $f \circ g$ dans le cas c) ?

Exercice 5. (Fonctions hyperboliques)

Vérifier les égalités suivantes :

- a) $\text{sh}(2x) = 2 \text{sh}(x) \text{ch}(x)$
- b) $(\text{ch}(x) + \text{sh}(x))^k = \text{ch}(kx) + \text{sh}(kx)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 6. (Fonctions hyperboliques réciproques)

Trouver les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques en suivant les étapes ci-dessous.

- a) $f(x) = \text{sh}(x)$
- b) $f(x) = \text{ch}(x)$
- c) $f(x) = \text{th}(x)$
- d) $f(x) = \text{coth}(x)$

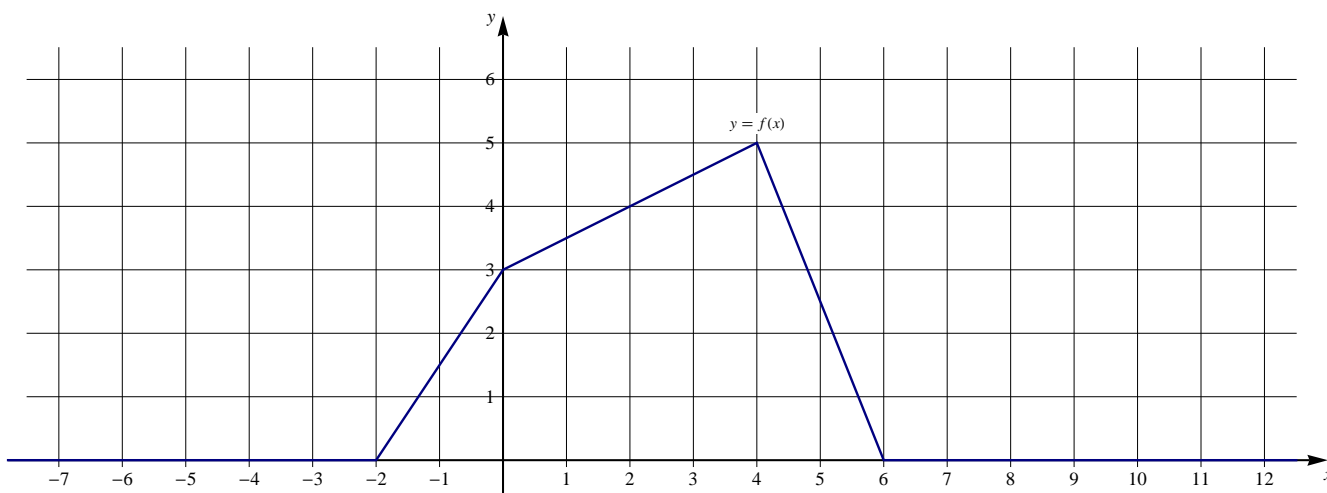
- Donner le domaine de définition et l'image de f .
- Exprimer la fonction réciproque f^{-1} en termes des fonctions Log, $\sqrt{\quad}$ et polynômes.
- Préciser le domaine de définition de f^{-1} .
- Esquisser les graphes de f et f^{-1} .

Exercice 7. (Fonctions bijectives)

- a) Soient les fonctions $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow A$ telles qu'on ait pour tout $x \in A$ que $(g \circ f)(x) = x$ et pour tout $y \in B$ que $(f \circ g)(y) = y$. Montrer que f est bijective et que $g = f^{-1}$.
- b) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si f est bijective, alors sa fonction réciproque est aussi impaire.

Exercice 8. (Transformations affines)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction représentée ci-dessous.



Tracer sur la même figure les graphes des fonctions $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

a) $g(x) = f(-x)$ b) $g(x) = f(x - 5)$ c) $g(x) = f(2x)$ d) $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

Exercice 9. (Composition de fonctions)

Pour les deux fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies ci-dessous, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x + 2, & x < 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |2x - 1|, & x \geq -1 \\ -x(x + 2), & x < -1 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x - 4}, & x \geq 4 \\ 1 - \frac{1}{2}x, & x < 4 \end{cases}$

Exercice 10. (V/F : Propriétés de fonctions)

Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Si f est strictement monotone, alors f est injective. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si f est injective, alors f est monotone. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Si f est bijective et croissante, alors son inverse f^{-1} est décroissante. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si $f \circ g$ est décroissante, alors f et g sont décroissantes. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |