

## Analyse I – Série 7

### Echauffement. (Périodicité)

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction périodique.

- a) La période de  $f$  est-elle toujours définie?
- b) Montrer que la fonction  $|f|$  est aussi périodique.
- c) La réciproque de b) est-elle vraie?
- d) La période de  $|f|$  est-elle égale à celle de  $f$  (si elle est définie)?

**Sol.:**

- a) La période de  $f$  n'est pas toujours définie. En effet, la fonction constante est périodique pour tout  $T > 0$  mais elle n'a pas de période au sens strict (il n'existe pas de plus petit  $T > 0$  tel que  $f$  soit  $T$ -périodique).
- b) La fonction  $|f|$  est périodique car, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x+T)| = |f(x)|$ , où  $T$  est une période de  $f$ .
- c) La réciproque est fautive : Pour la fonction non périodique  $f$  représentée à la Fig. 1, la fonction  $|f|$  est périodique (on peut imaginer prolonger  $f$  à  $\mathbb{R}$  tout entier en changeant de signe de façon non-périodique).

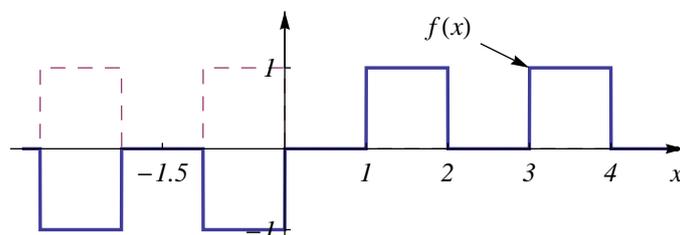


FIGURE 1 –

- d) La période de  $|f|$  n'est pas forcément égale à celle de  $f$  : les fonctions  $f$  et  $|f|$  représentées à la Fig. 2 ont les périodes  $T = 4$  resp.  $T = 2$ .

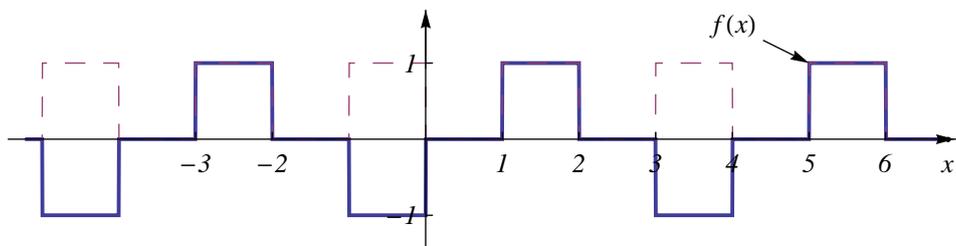


FIGURE 2 –

Notez encore que la période de  $|f|$  peut ne pas exister alors que celle de  $f$  existe. Exemple :  $f(x) = (-1)^{[x]}$ , où  $[x]$  dénote la partie entière de  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 1.** (Convergence de séries avec un paramètre)

Etudier la convergence de la série en fonction de la valeur de  $c \in \mathbb{R}$ .

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c}\right)^n, c \neq 1$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n$   
d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$       e)  $\sum_{n=1}^{\infty} (c-a)^n, a \in \mathbb{R}$  fixé      f)  $\sum_{n=1}^{\infty} (1+c^2)^n$

Quelle est la somme de la série c) lorsqu'elle converge ?

**Sol.:**

a) La série géométrique  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c}\right)^n$  converge absolument  $\Leftrightarrow \left|\frac{c}{1-c}\right| < 1 \Leftrightarrow c < \frac{1}{2}$ .

Remarque : On pourrait aussi utiliser le critère de Cauchy et puis traiter le cas où le critère de Cauchy ne permet pas de conclure (limite = 1) séparément. En effet, quand  $\left|\frac{c}{1-c}\right| = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ , on obtient la série  $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$  qui diverge.

b) Pour  $c = 0$  la convergence vers 0 est évidente et on peut supposer que  $c \neq 0$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} |c| \right) = |c|,$$

ce qui nous permet de conclure, grâce au critère de d'Alembert, que la série converge absolument si  $|c| < 1$  et qu'elle diverge si  $|c| > 1$ . Si  $c = \pm 1$ , la série diverge (évident pour  $c = 1$ ; et  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$  pour  $c = -1$  et donc la série diverge car le terme général diverge).

c) Pour  $c = 2k + 1$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\left| \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n \right| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et donc la série diverge.

Pour  $c \neq 2k + 1$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , on a par le critère de Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left| \sin\left(\frac{\pi c}{2}\right) \right| < 1,$$

et donc la série converge absolument et sa somme vaut (série géométrique commençant à  $n = 1$ )

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n = \frac{\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)}.$$

d) Pour  $c = 0$ , la série converge et est égale à zéro. Soit donc  $c \neq 0$ . En utilisant le critère de d'Alembert, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{c^n n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| c \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c|}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|c|}{e}.$$

Ainsi la série converge absolument si  $|c| < e$  et elle diverge si  $|c| > e$  (et on obtient aucune information si  $|c| = e$ ).

Si  $c = \pm e$ , la suite des valeurs absolues  $(|a_n|)_{n \geq 1}$  est croissante :

$$|a_{n+1}| = |a_n| \cdot \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > |a_n|$$

car la suite  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  croît vers  $e$ . Comme  $|a_1| = |c| = e$ , il suit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . Le critère nécessaire pour la convergence d'une série n'est donc pas satisfait et la série diverge.

e) Comme  $\sum_{n=1}^{\infty} (c - a)^n$  est une série géométrique, elle converge si et seulement si  $|c - a| < 1$ , c'est à dire si  $c \in ]a - 1, a + 1[$ .

f) La série diverge pour toute valeur de  $c$ .

**Exercice 2.** (Suite de sommes partielles)

Soit  $0 < c < 1$ , et posons pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$S_n = 1 + 2c + 3c^2 + \dots + nc^{n-1}.$$

a) Pour tout entier  $n \geq 1$ , calculer  $cS_n - S_n$ .

b) En déduire la somme de la série  $\sum_{k=1}^{\infty} kc^{k-1}$ .

**Sol.:**

a) On calcule

$$\begin{aligned} cS_n - S_n &= c(1 + 2c + 3c^2 + \dots + nc^{n-1}) - (1 + 2c + 3c^2 + \dots + nc^{n-1}) \\ &= -(1 + c + c^2 + \dots + c^{n-1}) + nc^n = -\frac{1 - c^n}{1 - c} + nc^n. \end{aligned}$$

b) En utilisant le résultat de i) on a d'une part pour tout  $n \geq 1$  :

$$\sum_{k=1}^n kc^{k-1} = S_n = \frac{1}{c-1} \left( -\frac{1-c^n}{1-c} + nc^n \right) = \frac{1-c^n}{(1-c)^2} + \frac{nc^n}{c-1}. \quad (1)$$

Dans l'Ex. 1b) on a montré que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} nc^n$  converge pour  $|c| < 1$ , donc en particulier pour  $0 < c < 1$ . Ainsi par le critère nécessaire de convergence d'une série,  $\lim_{n \rightarrow \infty} nc^n = 0$ . En laissant  $n \rightarrow \infty$  dans (1), on obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1-c^n}{(1-c)^2} + \frac{nc^n}{c-1} \right) = \frac{1}{(1-c)^2}.$$

**Exercice 3.** (Fonctions périodiques)

Donner le domaine de définition et étudier la parité et la périodicité des fonctions  $f$  suivantes en donnant la période le cas échéant :

a)  $f(x) = \frac{x^4 \cos(3x)}{1 + \sin(x)^2}$

b)  $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

c)  $f(x) = \operatorname{tg}(3x) + \cos(\pi x)$

d)  $f(x) = (x - [x])^2$

*Notation* :  $[x]$  est la partie entière du nombre réel  $x$  (c.-à-d.  $[x] \in \mathbb{Z}$  tel que  $[x] \leq x < [x] + 1$ ).

**Sol.:**

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ .  $f$  est paire parce que les fonctions  $x^4$ ,  $\cos$  et  $\sin^2$  sont paires.  $f$  est non périodique à cause du terme  $x^4$ .
2.  $D(f) = \mathbb{R}$ .  $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$  est impair et  $4\pi$ -périodique;  $\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$  est pair et  $6\pi$ -périodique. Ainsi  $f$  est impaire et  $12\pi$ -périodique.
3. La fonction  $\text{tg}(3x)$  n'est pas définie pour  $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ , donc

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$\text{tg}(3x)$  est  $\frac{\pi}{3}$ -périodique et impaire.  $\cos(\pi x)$  est 2-périodique et pair.

Donc  $f$  n'est ni paire ni impaire. De plus,  $f$  n'est pas périodique car  $\frac{\pi/3}{2} \notin \mathbb{Q}$ .

4.  $D(f) = \mathbb{R}$ .  $f$  n'est ni paire, ni impaire, mais 1-périodique (cf. Fig. 3).

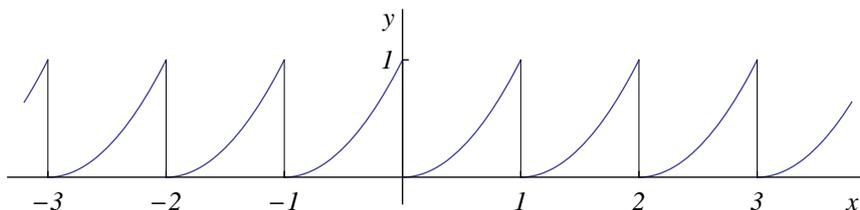


FIGURE 3 –

**Exercice 4.** (Fonctions monotones)

Soient les fonctions  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Déterminer la monotonie de leur composée  $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si

- a)  $f$  et  $g$  sont croissantes,
- b)  $f$  et  $g$  sont décroissantes,
- c)  $f$  est croissante et  $g$  est décroissante.

Qu'en est-il de la monotonie de  $f \circ g$  dans le cas c) ?

**Sol.:**

- a) Comme  $f$  et  $g$  sont croissantes, on a

$$x_1 \leq x_2 \xrightarrow{f \uparrow} f(x_1) \leq f(x_2) \xrightarrow{g \uparrow} g(f(x_1)) \leq g(f(x_2)),$$

c'est-à-dire  $g \circ f$  est aussi croissante.

- b) Comme  $f$  et  $g$  sont décroissantes, on a

$$x_1 \leq x_2 \xrightarrow{f \downarrow} f(x_1) \geq f(x_2) \xrightarrow{g \downarrow} g(f(x_1)) \leq g(f(x_2)),$$

c'est-à-dire  $g \circ f$  est croissante.

c) Pour  $f$  croissante et  $g$  décroissante on a

$$x_1 \leq x_2 \xrightarrow{f\uparrow} f(x_1) \leq f(x_2) \xrightarrow{g\downarrow} g(f(x_1)) \geq g(f(x_2)),$$

c'est-à-dire  $g \circ f$  est décroissante.

Pour la composée  $f \circ g$  on a

$$x_1 \leq x_2 \xrightarrow{g\downarrow} g(x_1) \geq g(x_2) \xrightarrow{f\uparrow} f(g(x_1)) \geq f(g(x_2)),$$

c'est-à-dire  $f \circ g$  est aussi décroissante. La composée de deux fonctions avec monotonies opposées est donc toujours décroissante.

### Exercice 5. (Fonctions hyperboliques)

Vérifier les égalités suivantes :

- $\text{sh}(2x) = 2 \text{sh}(x) \text{ch}(x)$
- $(\text{ch}(x) + \text{sh}(x))^k = \text{ch}(kx) + \text{sh}(kx)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

**Sol.:**

1. On commence par le côté droit de l'égalité.

$$\begin{aligned} 2 \text{sh}(x) \text{ch}(x) &= 2 \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( (e^x)^2 - (e^{-x})^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x}) = \text{sh}(2x) \end{aligned}$$

2. Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  on a

$$(\text{ch}(x) + \text{sh}(x))^k = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^k = (e^x)^k = e^{kx} = \text{ch}(kx) + \text{sh}(kx).$$

### Exercice 6. (Fonctions hyperboliques réciproques)

Trouver les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques en suivant les étapes ci-dessous.

- $f(x) = \text{sh}(x)$
- $f(x) = \text{ch}(x)$
- $f(x) = \text{th}(x)$
- $f(x) = \text{coth}(x)$

- Donner le domaine de définition et l'image de  $f$ .
- Exprimer la fonction réciproque  $f^{-1}$  en termes des fonctions Log,  $\sqrt{\quad}$  et polynômes.
- Préciser le domaine de définition de  $f^{-1}$ .
- Esquisser les graphes de  $f$  et  $f^{-1}$ .

**Sol.:**

Remarque préliminaire : Pour trouver la fonction réciproque, il faut résoudre l'équation  $y = f(x)$  pour  $x$  et puis échanger les variables  $x$  et  $y$ .

1. La fonction  $\text{sh}(x)$  va de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  (cf. Fig. 4). On a

$$y = \text{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) \Leftrightarrow 2y = e^x - \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Comme  $e^x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$  et donc la fonction réciproque est

$$\text{arsinh}(x) := \text{Log}(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Comme  $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$  aussi pour  $x < 0$ . Ainsi le domaine de  $\text{arsinh}$  est  $\mathbb{R}$  (la fonction  $\text{sh}$  est en fait bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ ). Les graphes des fonctions  $\text{sh}$  et  $\text{arsinh}$  sont tracés sur les Figs. 4 et 5.

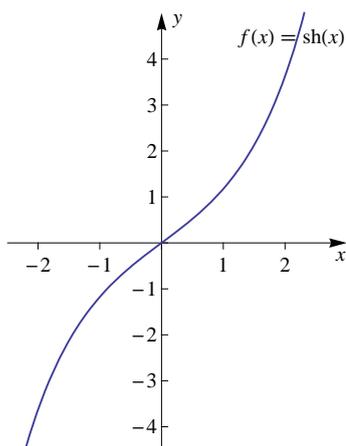


FIGURE 4 –

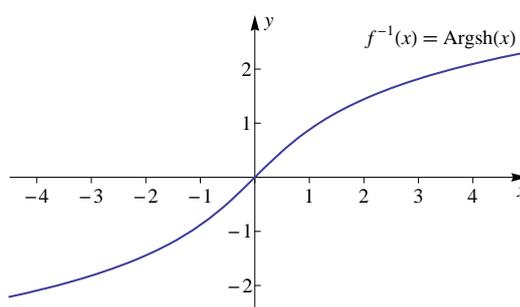


FIGURE 5 –

2. Le domaine de  $\text{ch}(x)$  est  $\mathbb{R}$  mais son image est  $[1, \infty)$  (cf. Fig. 6). On a

$$y = \text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) \Leftrightarrow 2y = e^x + \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Comme  $y = \text{ch}(x) \geq 1$ , la radicande est bien non-négative. La condition  $e^x > 0$  est satisfaite pour les deux signes de la racine. Comme  $y \geq 1$ , on obtient  $e^x \geq 1$  si on prend  $+\sqrt{\cdot}$  et  $e^x \leq 1$  si on prend  $-\sqrt{\cdot}$ . Ces deux solutions correspondent donc aux cas  $x \geq 0$  et  $x \leq 0$  respectivement. En fait, la fonction  $\text{ch}(x)$  n'est pas injective sur  $\mathbb{R}$  mais seulement sur  $[0, \infty[$  ou  $]-\infty, 0]$  (cf. Fig. 6) et donc il faut la restreindre à un de ces domaines pour qu'elle soit inversible. Par convention, on prend  $x \geq 0$  et donc la fonction réciproque est

$$\text{arcosh}: [1, \infty[ \longrightarrow [0, \infty[ \text{ définie par } \text{arcosh}(x) = \text{Log}(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Les graphes des fonctions  $\text{ch}$  et  $\text{arcosh}$  sont tracés sur les Figs. 6 et 7. Comme illustration, la fonction réciproque de la fonction  $g: ]-\infty, 0] \rightarrow [1, \infty[, g(x) = \text{ch}(x)$  est aussi tracée sur la Fig. 7 (courbe hachurée). Cette fonction correspond à la solution avec  $-\sqrt{\cdot}$  ci-dessus.

3. Le domaine de  $\text{th}(x)$  est  $\mathbb{R}$  parce que  $\text{sh}(x)$  et  $\text{ch}(x)$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  et  $\text{ch}(x)$  ne s'annule jamais. Pour trouver l'image de  $\text{th}(x)$ , on calcule ses limites lorsque  $x$  tend vers  $\pm\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{th}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

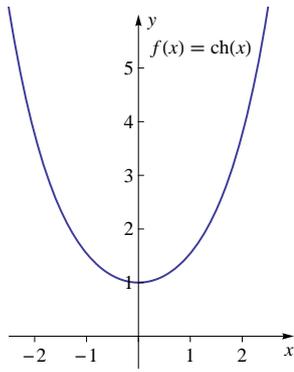


FIGURE 6 –

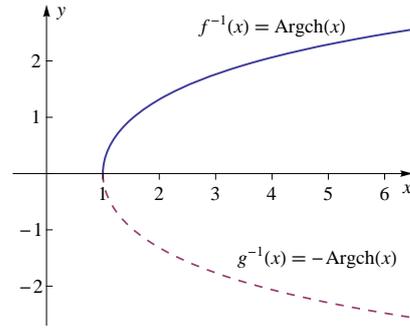


FIGURE 7 –

où on a utilisé que  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ . En effet, comme la suite  $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  croît vers  $e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a en particulier que  $e^x \geq a_1 = 1 + x$ . Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \geq \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1) = \infty \quad \text{et donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} e^x} = 0.$$

L'image de  $\text{th}(x)$  est donc  $] -1, 1[$  (cf. Fig. 8). On a

$$y = \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} \Leftrightarrow (e^x)^2(1 - y) = 1 + y \Leftrightarrow e^x = \pm \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}.$$

Notons que  $y \in ] -1, 1[$  car  $\text{Im}(\text{th}) = ] -1, 1[$  et donc la radicande est non-négative et bien définie. Comme  $e^x > 0$ , il faut prendre la racine positive et donc la fonction réciproque de  $\text{th}$  est

$$\text{artanh}: ] -1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{artanh}(x) = \frac{1}{2} \text{Log}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

Les graphes des fonctions  $\text{th}$  et  $\text{artanh}$  sont tracés sur les Figs. 8 et 9.

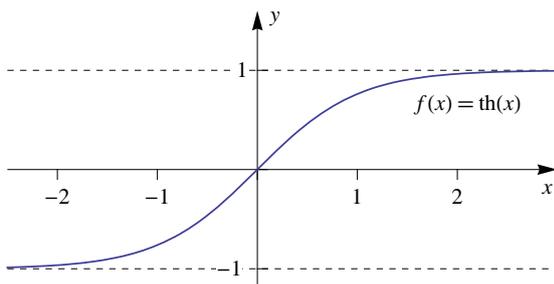


FIGURE 8 –

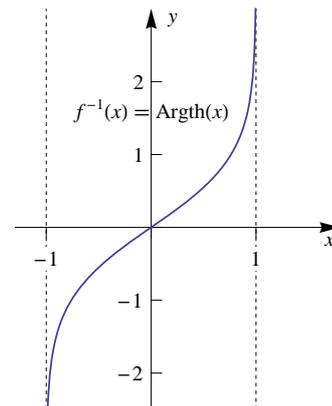


FIGURE 9 –

4. Comme la fonction  $\text{sh}$  s'annule en  $x = 0$ , le domaine de définition de  $\text{coth}$  est  $\mathbb{R}^*$ . Afin de simplifier la suite de l'exercice, observons que  $\text{coth}(x) = \frac{1}{\text{th}(x)}$ . Comme l'image de  $\text{th}(x)$  est  $] -1, 1[$ , il suit que l'image de  $\text{coth}(x)$  est  $] -\infty, -1[ \cup ] 1, \infty[$ , cf. Fig. 10. On pourrait trouver

la fonction réciproque en procédant comme pour la fonction th au iii), mais il est plus facile d'utiliser la relation avec la fonction th pour obtenir

$$y = \coth(x) = \frac{1}{\operatorname{th}(x)} \Leftrightarrow \operatorname{th}(x) = \frac{1}{y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left( \frac{1 + \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{y}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left( \frac{y + 1}{y - 1} \right).$$

Notons que  $|y| > 1$  car  $y$  est dans l'image de  $\coth$ , et donc l'argument du logarithme est toujours positif. Ainsi la fonction réciproque de  $\coth$  est

$$\operatorname{arcoth}: ]-\infty, -1[ \cup ]1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left( \frac{x + 1}{x - 1} \right).$$

Voir les Figs. 10 et 11 pour les graphes des fonctions  $\coth$  et  $\operatorname{arcoth}$ .

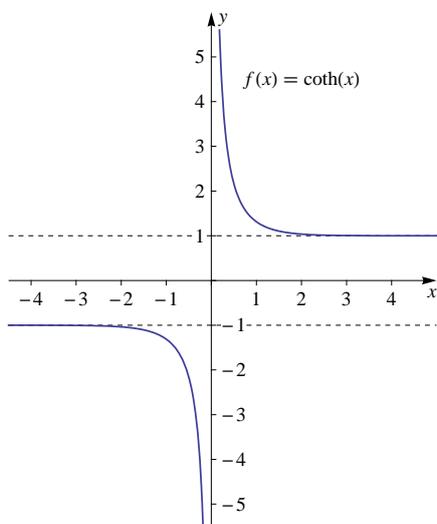


FIGURE 10 –

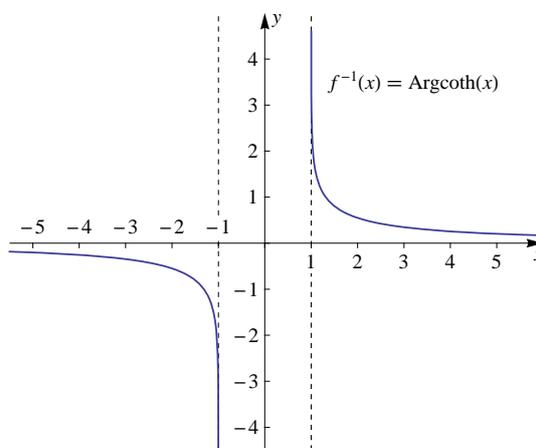


FIGURE 11 –

### Exercice 7. (Fonctions bijectives)

- Soient les fonctions  $f: A \rightarrow B$  et  $g: B \rightarrow A$  telles qu'on ait pour tout  $x \in A$  que  $(g \circ f)(x) = x$  et pour tout  $y \in B$  que  $(f \circ g)(y) = y$ . Montrer que  $f$  est bijective et que  $g = f^{-1}$ .
- Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction impaire. Montrer que si  $f$  est bijective, alors sa fonction réciproque est aussi impaire.

**Sol.:**

- Pour montrer que la fonction  $f$  est bijective, on doit montrer qu'elle est surjective et injective. Soit  $y \in B$ . Alors  $y = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ , donc il existe  $z := g(y) \in A$  tel que  $y = f(z)$ , c'est-à-dire  $f$  est surjective. Soient  $z_1, z_2 \in A$  tels que  $f(z_1) = f(z_2)$ . Alors on a  $g(f(z_1)) = g(f(z_2))$ , ce qui montre que  $z_1 = z_2$  car  $(g \circ f)(x) = x$  pour tout  $x \in A$ . Ainsi  $f$  est injective et donc bijective. La fonction réciproque de  $f$  satisfait alors  $f^{-1}(y) = f^{-1}((f \circ g)(y)) = (f^{-1} \circ f)(g(y)) = g(y)$  pour tout  $y \in B$  et donc  $f^{-1} = g$ .

b) Comme  $f$  est bijective sur  $\mathbb{R}$ , sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ . On a donc

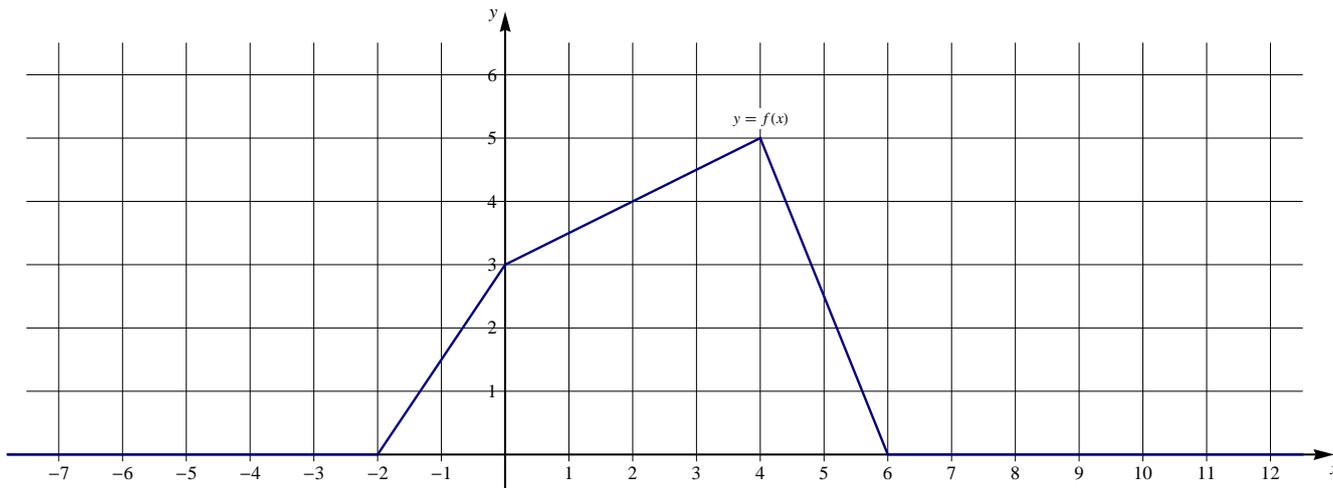
$$f^{-1}(-y) = x \stackrel{f(\cdot)}{\Leftrightarrow} -y = f(x) \Leftrightarrow y = -f(x)$$

$$\stackrel{f \text{ impaire}}{\Leftrightarrow} y = f(-x) \stackrel{f^{-1}(\cdot)}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y) = -x \Leftrightarrow -f^{-1}(y) = x.$$

Ainsi on a bien montré que  $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$ , c'est-à-dire que  $f^{-1}$  est aussi impaire.

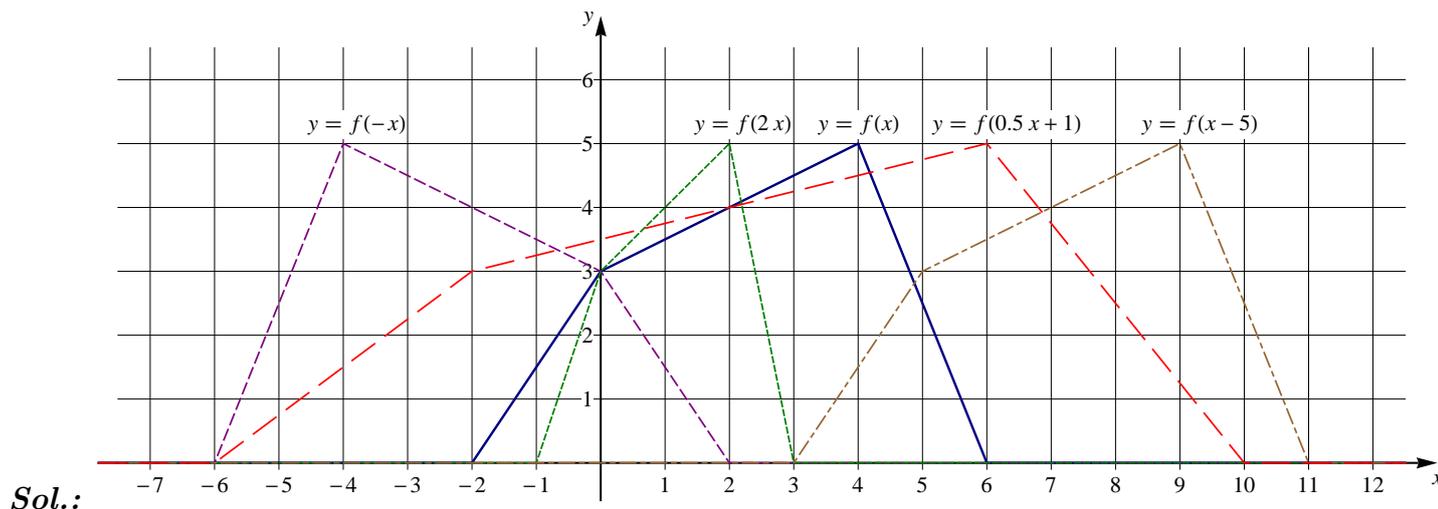
**Exercice 8.** (Transformations affines)

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction représentée ci-dessous.



Tracer sur la même figure les graphes des fonctions  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

- a)  $g(x) = f(-x)$       b)  $g(x) = f(x - 5)$       c)  $g(x) = f(2x)$       d)  $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$



**Exercice 9.** (Composition de fonctions)

Pour les deux fonctions  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies ci-dessous, calculer  $f \circ g$  et  $g \circ f$  :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases} & \text{et} & \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x + 2, & x < 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad f(x) &= \begin{cases} |2x - 1|, & x \geq -1 \\ -x(x + 2), & x < -1 \end{cases} & \text{et} & \quad g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x - 4}, & x \geq 4 \\ 1 - \frac{1}{2}x, & x < 4 \end{cases} \end{aligned}$$

**Sol.:**

a) Pour calculer  $f \circ g$ , il faut déterminer les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $g(x) \geq 0$  et  $g(x) < 0$  respectivement et puis appliquer l'expression correspondante de  $f$  au résultat  $g(x)$ .

On a  $x^2 \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $x + 2 \geq 0$  pour  $x \geq -2$ . Ainsi  $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$  et donc

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2g(x) - 3, & x \geq -2 \\ g(x), & x < -2 \end{cases} = \begin{cases} 2x^2 - 3, & x \geq 1 \\ 2x + 1, & -2 \leq x < 1 \\ x + 2, & x < -2 \end{cases}$$

Le procédé pour  $g \circ f$  est similaire. Comme  $2x - 3 \geq 1$  pour  $x \geq 2$  et  $f(x) < 0$  pour tout  $x < 0$ , on a  $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$ . Ainsi

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} f(x)^2, & x \geq 2 \\ f(x) + 2, & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} (2x - 3)^2, & x \geq 2 \\ 2x - 1, & 0 \leq x < 2 \\ x + 2, & x < 0 \end{cases}$$

b) Calcul de  $f \circ g$  :

Pour  $x \geq 4$  on a

$$-\sqrt{x - 4} \geq -1 \Leftrightarrow x - 4 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5$$

et pour tout  $x < 4$  on a  $1 - \frac{1}{2}x \geq -1$ . Ainsi  $g(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 5$  et donc

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \begin{cases} |2g(x) - 1|, & x \leq 5 \\ -g(x)(g(x) + 2), & x > 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} |1 - x|, & x < 4 \\ | -2\sqrt{x - 4} - 1 |, & 4 \leq x \leq 5 \\ 2\sqrt{x - 4} - x + 4, & x > 5 \end{cases} = \begin{cases} |1 - x|, & x < 4 \\ 2\sqrt{x - 4} + 1, & 4 \leq x \leq 5 \\ 2\sqrt{x - 4} - x + 4, & x > 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Calcul de  $g \circ f$  :

Pour  $x \geq -1$ , on a

$$|2x - 1| \geq 4 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 4 \text{ ou } 2x - 1 \leq -4 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2} \quad (\text{car } x \geq -1)$$

et pour  $x < -1$  on a  $-x(x + 2) \geq 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 \leq 0$ , ce qui est impossible car le polynôme n'a pas de racines réelles. Ainsi  $f(x) \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$  et donc

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= \begin{cases} -\sqrt{f(x) - 4}, & x \geq \frac{5}{2} \\ 1 - \frac{1}{2}f(x), & x < \frac{5}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\sqrt{|2x - 1| - 4}, & x \geq \frac{5}{2} \\ 1 - \frac{1}{2}|2x - 1|, & -1 \leq x < \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}x^2 + x + 1, & x < -1 \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt{2x - 5}, & x \geq \frac{5}{2} \\ 1 - \frac{1}{2}|2x - 1|, & -1 \leq x < \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}x^2 + x + 1, & x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

**Exercice 10.** (V/F : Propriétés de fonctions)

Soient  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions.

- |   | V                        | F                        |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Si $f$ est strictement monotone, alors $f$ est injective.                        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si $f$ est injective, alors $f$ est monotone.                                    | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Si $f$ est bijective et croissante, alors son inverse $f^{-1}$ est décroissante. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si $f \circ g$ est décroissante, alors $f$ et $g$ sont décroissantes.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**Sol.:**

a) *VRAI.*

Soient  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $x_1 < x_2$ . Si  $f$  est strictement croissante, on a  $f(x_1) < f(x_2)$  et si  $f$  est strictement décroissante, on a  $f(x_1) > f(x_2)$ . Dans les deux cas  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , c.-à-d.  $f$  est injective.

b) *FAUX.*

Prendre par exemple  $f(x) = 2[x] - x + 1$ . Soient  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Alors

$$\begin{aligned} 2[x_1] - x_1 + 1 = 2[x_2] - x_2 + 1 &\Rightarrow 2([x_1] - [x_2]) = x_1 - x_2 \\ \Rightarrow x_1 - x_2 = 2k &\text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2 + 2k) &= 2[x_2 + 2k] - (x_2 + 2k) + 1 \\ &= 2([x_2] + 2k) - (x_2 + 2k) + 1 \\ &= 2[x_2] + 2k - x_2 + 1 = f(x_2) + 2k. \end{aligned}$$

Or,  $f(x_1) = f(x_2)$  par hypothèse, si bien que  $k = 0$  et donc  $x_1 = x_2$ . Ainsi  $f$  est bien injective. Mais  $f$  n'est pas monotone parce qu'on a par exemple  $f(0) = 1 > f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ , mais  $f(0) = 1 < f(1) = 2$ . En fait,  $f$  est monotone (strictement décroissante) sur chacun des intervalles  $[k, k + 1[$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  mais pas sur  $\mathbb{R}$ , voir Fig. 12.

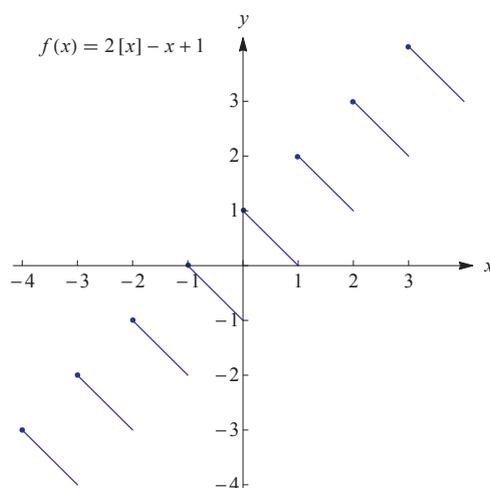


FIGURE 12 –

c) FAUX.

Prendre par exemple  $f(x) = f^{-1}(x) = x$ .

d) FAUX.

Prendre par exemple  $f(x) = x$  et  $g(x) = -x$ . Alors  $(f \circ g)(x) = -x$  est décroissante mais  $f$  ne l'est pas.