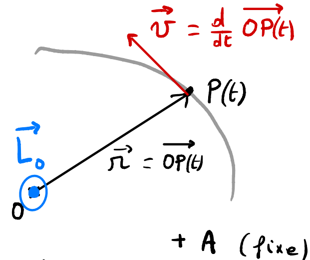
Moment cinétique et gravitation



I) Déf. du moment cinétique (par rapport au point O)

$$\boxed{\vec{L}_o = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge (m\vec{v})}$$

Par rapport à A ? $\vec{L}_A(t) = \overrightarrow{AP} \wedge \frac{d}{dt}\overrightarrow{AP} \times m = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) \wedge m\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP})$

$$= \overrightarrow{AO} \wedge m\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP} + \vec{L}_o(t) = \overrightarrow{AO} \wedge m\vec{v} + \vec{L}_o(t) \neq \vec{L}_o(t)$$

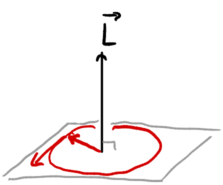
* Cas particulier : mouvement central

Si la somme des forces, donc $m\vec{a}$, est en tout temps dirigée vers un même point O
alors $\vec{L}_o = \overrightarrow{\text{constant}}$

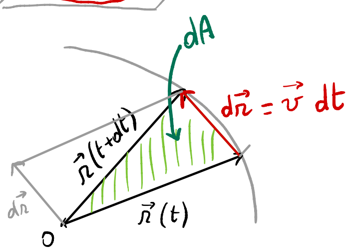
Démo : $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v}}_{\vec{v} \wedge m\vec{v} = 0} + \vec{r} \wedge \underbrace{m\frac{d\vec{v}}{dt}}_{m\vec{a} /\!/ \vec{r}} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

Conséquences

① Direction de $\vec{L}$ est constante, perpendiculaire à $\vec{r}$ et $\vec{v}$
↳ Le mvt est contenu dans un plan ⊥ à $\vec{L}$



② $\|\vec{L}\| = \text{constante} = L$ ⟶ "Loi des aires" ($2^{\text{ème}}$ Kepler)

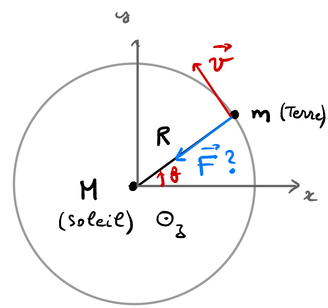


Propriété du produit vectoriel :

$$dA = \frac{1}{2}\|\vec{r} \wedge d\vec{r}\| = \frac{1}{2}\|\vec{r} \wedge \vec{v}\|\,dt = \frac{1}{2}\frac{\|\vec{L}\|}{m}\,dt$$

donc $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{m}\|\vec{L}\|$

$M \gg m$



II) Raisonnement de Newton pour trouver $\vec{F}_{gravitation}$

a) Hypothèse : orbite circulaire → $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$
où $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{e}_z$

Donc $\vec{L} = m\, \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = m R^2 \omega\, \hat{e}_z \quad (\Rightarrow \vec{L} = mR^2 \vec{\omega})$

Comme $\vec{L} = \vec{cst} \longrightarrow \omega = c^{ste}$ (mvt circulaire uniforme)

b) 2ème loi de Newton : $F = m \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{m}{R} \left(\dfrac{2\pi R}{T} \right)^2$ où T est la période

c) 3ème loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{(2\pi)^2}{\chi_M}$ $\qquad \chi_M$ est une constante qui dépend des propriétés du soleil.

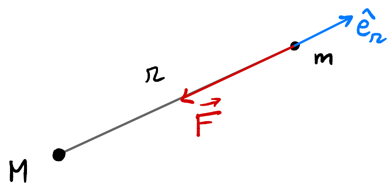
$$\frac{(2\pi R)^2}{T^2} = \frac{\chi_M}{R} \quad \text{et ainsi} \quad F = \frac{m}{R} \cdot \frac{\chi_M}{R} = \boxed{\frac{m\chi_M}{R^2}}$$

Proportionelle à m et à $\dfrac{1}{R^2}$

d) 3ème loi de Newton : $\vec{F}_{m\to M} = -\vec{F}_{M\to m} \Rightarrow F_{m\to M} = F_{M\to m}$

Donc : $\dfrac{\chi_M\, m}{R^2} = \dfrac{\chi_m \cdot M}{R^2} \Rightarrow \dfrac{\chi_m}{\chi_M} = \dfrac{m}{M} \Rightarrow$ $\chi_M = \boxed{\mathcal{G}} \cdot M$, $\chi_m = \boxed{\mathcal{G}} \cdot m$ (constante)

Au final on a montré que $\boxed{\vec{F}_{grav} = -\dfrac{mM\mathcal{G}}{r^2}\, \hat{e}_r}$



III) Energie potentielle de gravitation

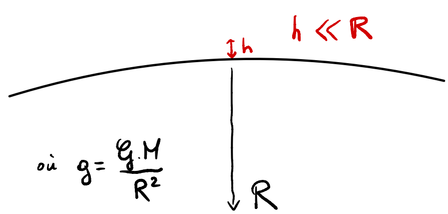
On peut montrer que l'énergie potentielle est $\boxed{V(r) = -\dfrac{mM\mathcal{G}}{r}}$

$\hookrightarrow \; -\vec{\nabla} V(r) = -\dfrac{mM\mathcal{G}}{r^2}\, \hat{e}_r$

Lien avec l'énergie potentielle de pesanteur ?

$$V(R+h) \underset{h \ll R}{=} V(R) + V'(R) \cdot h + \dots O(h^2)$$

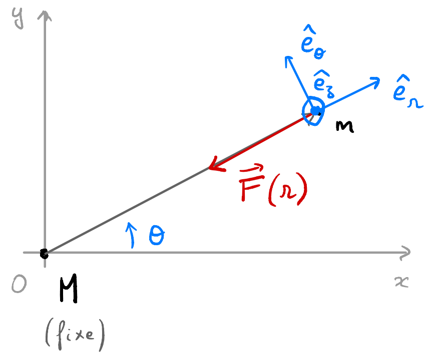
$$\simeq V(R) + h \cdot \frac{\mathcal{G} M . m}{R^2} = c^{ste} + m g h \quad \text{où } g = \frac{\mathcal{G} . M}{R^2}$$



IV) Mvt dans le champ de gravitation créé par une masse fixe

a) 2ème loi de Newton

$$\vec{F}_{M\to m} = m_i \vec{a} \Leftrightarrow \underbrace{m_i}_{\text{masse inertielle}} \vec{a} = -\underbrace{m}_{\text{masse gravitationnelle}} \frac{GM}{r^2}\hat{e}_r$$



$$\rightarrow \vec{a} = -\frac{GM}{r^2}\hat{e}_r$$

* $\vec{F}$ est conservative $\longrightarrow$ E est conservée
* $\vec{F}$ est centrale $\longrightarrow$ $\vec{L}_o$ est conservé
  (pointe toujours vers O)

On commence avec 3 coordonnées libres r, θ, z

Quantités conservées :

① Direction de $\vec{L}_o$ $\longrightarrow$ mvt plan $\longrightarrow$ $z = c^{ste}$

② Norme de $\vec{L}_o$
③ Energie mécanique
$\Big\}$ 2 équations $\leftrightarrow$ 2 variables r, θ

coordonnées cylindriques :

$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

• Moment cinétique :

$$\vec{L} = m\vec{r}\wedge\vec{v} = m\, r\hat{e}_r \wedge (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\,\hat{e}_z$$

$$\|\vec{L}\| = L = c^{ste} \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = L \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}}$$

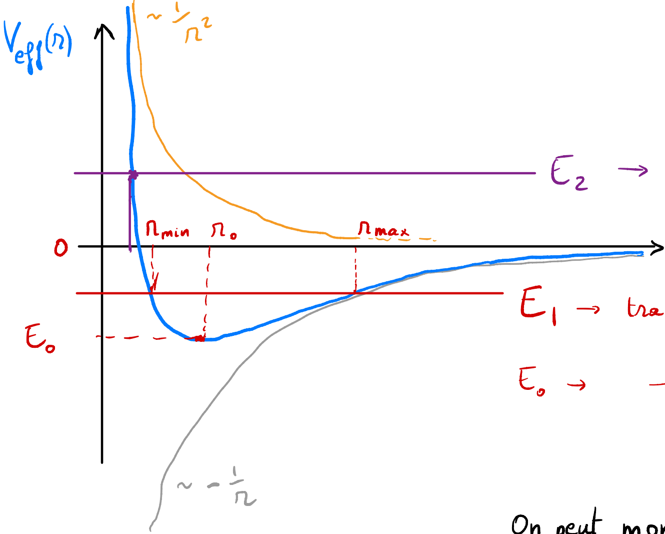
• Energie mécanique :

$$E = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + V(r) \quad \text{où} \quad V(r) = -\frac{G.M.m}{r}$$

or $\|\vec{v}\|^2 = (\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2$

On peut écrire

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r)$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r}}_{}$$
$$= K_{rad.} + V_{eff}(r) = E(r)$$



$E_2 \rightarrow$ trajectoire non liée (diffusion)
↳ hyperbole, ou parabole

$E_1 \rightarrow$ trajectoire elliptique

$E_0 \rightarrow$ ——— circulaire

On peut montrer* que les trajectoires sont

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

e = excentricité

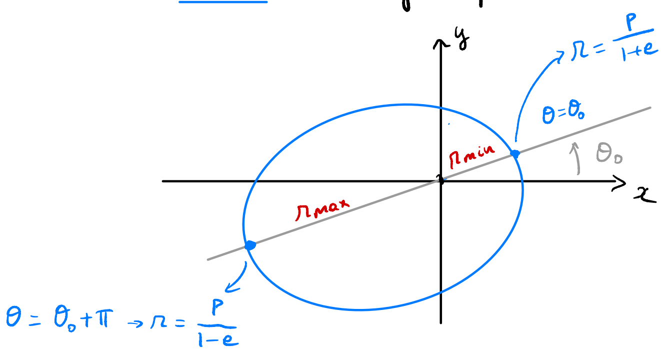
(e, p donnés par conditions initiales)
(* voir démonstration ci-dessous)

① Si $e = 0$: $r(\theta) = p \longrightarrow$ un cercle de rayon p

② Si $0 < e < 1$: Ellipse

$$r_{min} = \frac{p}{1+e}$$

$$r_{max} = \frac{p}{1-e}$$

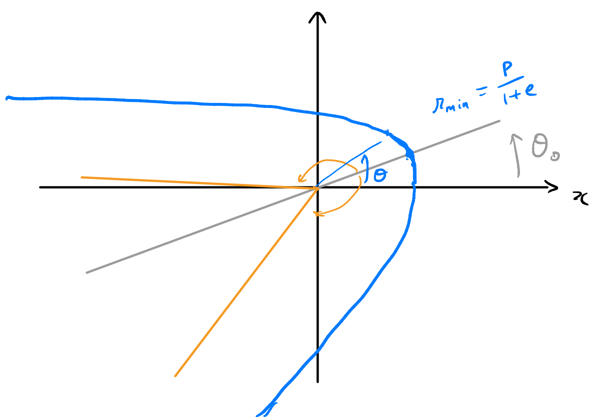


③ Si $e > 1$: hyperbole

$r(\theta)$ diverge lorsque $\cos(\theta - \theta_0) \longrightarrow -\frac{1}{e}$

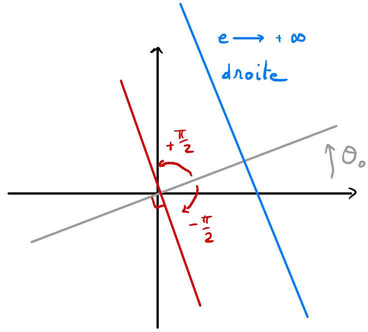
c'est à dire lorsque $\theta \longrightarrow \theta_\pm$ où :

$$\theta_\pm = \theta_0 \pm \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$$



Remarque : si $e \gg 1$, $\frac{1}{e} \approx 0$ et $\arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \approx \frac{\pi}{2}$

↳ trajectoire rectiligne



④ Si $e=1$: parabole $\quad (\theta_{\pm} = \theta_0 + \pi)$

V) Résolution du problème de Kepler (démonstration de $r(\theta) = \dots$)

$2^{ème}$ loi projeté selon $\hat{e}_r$: $\quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -m\frac{\mathcal{G}M}{r^2} \iff \ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}$

Changement de variable : $\quad r(t), \theta(t) \longrightarrow \boxed{\theta(t),\ q(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}}$ c'est à dire $r(\theta) = \frac{1}{q(\theta)}$

$$\dot{q} = \frac{dq}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{dq}{d\theta}\cdot\dot{\theta} \quad ; \quad \dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{1}{q^2}\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{q^2}\dot{\theta}\frac{dq}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{dq}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{d\theta}\right) = -\frac{L}{m}\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dq}{d\theta}\right) = -\frac{L}{m}\dot{\theta}\frac{d^2q}{d\theta^2} \quad \text{or} \quad \dot{\theta} = q^2\frac{L}{m}$$

Donc $\ddot{r} = -\frac{L^2}{m^2}q^2\frac{d^2q}{d\theta^2}$

$\iff$ oscillateur harmonique $\omega_0 = 1$

$2^{ème}$ loi : $\quad -\frac{L^2}{m^2}q^2\frac{d^2q}{d\theta^2} - \frac{L^2}{m^2}q^3 = -\mathcal{G}M q^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2q}{d\theta^2} + q = \frac{m^2\mathcal{G}M}{L^2}}$

On reconnait $\quad q(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{\mathcal{G}Mm^2}{L^2} = \underbrace{\frac{\mathcal{G}Mm^2}{L^2}}_{1/p}\left(1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right)$

et donc $\quad \boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}} \qquad p = \frac{L^2}{\mathcal{G}Mm^2}$