- A comment $I \subset A$

$(A/I, +, \cdot)$ $\quad A/I = \{ a + I = a(I) \quad a \in A \}$

$$a(I) + b(I) = a+b(I)$$
$$a(I) \cdot b(I) = a \cdot b(I)$$

si $a(I) = a'(I)$ $\quad a'(I) + b(I) = a(I) + b(I) = a+b(I$

?

A/I est un corps.

A/I est un corps A/I possède au moins 2 elts $0_{A/I}$ $1_{A/I}$

$$0_{A/I} = I \quad 1_{A/I} = 1 + I$$

$I \neq 1 + I$ en partical $1 \notin I$

$\Rightarrow I \neq A$

A/I = Corps toute classe $a(I) \neq 0_{A/I}$ est inversible

$$a(I) = a + I \neq I \Leftrightarrow a \notin I$$

dire que $a(I)$ est inversible

il existe $b \in A$ tq

$$a(I) \cdot b(I) = ab(I) = ab + I = 1_{A/I} = 1 + I$$

$\Longleftrightarrow$ il existe $b \in A$ tq $ab - 1 \in I$

On va voir que I doit etre maximal:

Si $J \subsetneq A$ est un ideal tq $J \supset I$ alors $J = I$

Soit J un tel ideal $I \subset J \subsetneq A$

Supposons $J \neq I$ il existe $a \in J \setminus I$

et donc $a(I)$ est inversible dans A/I

$\exists b \in A$ tq $ab - 1 \in I$

J est un ideal de A et comme $a \in J$

et $b \in A$ $ab \in J$ (J = ideal de A)

$$ab - 1 = i \Rightarrow 1 = \underset{\substack{\Uparrow \\ J}}{ab} - \underset{\in I \subset J}{i} \in J$$

$1 \in J$: J ideal de A $\forall a' \in A$

$\forall a' \in A$ $a' = a' . 1 \in J$

$A = J$ exclu.

<u>Lemme:</u> A anneau et J un ideal si

il existe $u \in A^{\times}$ tq $u \in J$ alors

$J = A$

<u>Preuve</u> : $u \in A^\times$ $\exists v \in A$ tq

$uv = 1$ comme $u \in J$ $\underset{\underset{1}{\shortparallel}}{uv} \in J$

$1 \in J$

$\forall a \in A$ $\underset{\underset{a}{\shortparallel}}{a.1} \in J$ $\Rightarrow A = J.$

$\square$

<u>Reci</u> : Si I est maximal $\Rightarrow A/I$ = Corps ?

$\rightsquigarrow A/I$ est commutatif

comme $I \neq A$ $\quad A/I \neq \{0_{A/I}\}$

$\{I \neq A\}$

A/I a au − 2 elts.

si $a(I) \neq 0_{A/I}$ $\quad a(I)$ est inversible

$a(I)$ inversible $\Longleftrightarrow \exists b \in A$ tq $a.b \equiv 1 (I)$
$= 1 + I$

$a.b + I = 1 + I$

$a.b \in 1 + I$: il existe $i \in I$ tq

$a.b = 1 + i$.

$a(I) \neq 0_{A/I} \Longleftrightarrow a \notin I$

on regarde le A-module engendré par

a et I

$J = \langle a, I \rangle \ni a$, $\supset I$ et $J \supsetneq I$ (car sinon $a \in I$)

l'idéal engendré par a et I

Comme I est max J est forcement égal à A

(sinon $I \subsetneq J \subsetneq A$ impossible si I est max)

$J = A$ $\quad 1 \in J \quad 1 = b.a + i \quad i \in I$

$a.b = 1 - i \in 1 + I$

$a.b(I) = 1(I)$

$a(I)$ est inversible d'inverse $b(I)$.

q2. I premier $\Longleftrightarrow$ A/I integre

$\Longrightarrow$ A/I integre : soient $a, b \in A$ si

$a(I) \cdot b(I) = 0_{A/I} \Longrightarrow a(I) = 0_{A/I}$

$\quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad$ ou

$a \cdot b(I) \qquad\qquad\qquad b(I) = 0_{A/I}$

$a \cdot b(I) = 0_{A/I} \Longleftrightarrow a \cdot b \in I$

$\quad \| $

$\quad I \qquad$ comme I est premier $\Longrightarrow$

ou bien $a \in I$ ou bien $b \in I$

$a(I) = 0_{A/I}$ $b(I) = 0_{A/I}$

$\Longleftarrow$?!

3 : si I est maximal $\Longrightarrow$ A/I = corps

$\Longrightarrow$ A/I intègre $\Longrightarrow$ I premier

Ex 7 : $I \subset K$ ideal

si $I = \{0_K\}$ fini

$I \neq \{0_K\}$ il existe $a \in I$ $a \neq 0_K$

a est inversible : $\exists b \in K$ tq $\underset{\substack{\Uparrow \\ I}}{a} \cdot \underset{\substack{\cap \\ A}}{b} = 1$ $\quad$ ($\in I$)

$1 \in I$

$1 \in I$ $\forall k \in K$

$k.1 = k \in I$ $\quad$ $K = I$.

$\varphi : K \longrightarrow A$ morphisme d'anneau

si $\varphi \neq \underline{0}_A$ alors

$\underline{I} = \ker\varphi$ est un idéal de K $\neq K$

$\Rightarrow \ker\varphi = \{0_K\} \rightsquigarrow \varphi$ est inj

- $\varphi : K \longrightarrow V$

$\ker \varphi$ est un sous-module de K.
^{K}

donc un ideal de K

soit $\{0_K\}$ φ inj

soit K $\varphi = \underline{0}_V$