

Corrigé série 7

Exercice 1 (10 points)

a) $f'(x) = 3(2x^2 + 3x - 5)^2(4x + 3)$

b) $g'(x) = \left((x^2 + 5x - 4)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x^2 + 5x - 4)^{-\frac{1}{2}}(2x + 5) = \frac{2x + 5}{2\sqrt{x^2 + 5x - 4}}$

c) $h'(x) = 2 \left(\frac{x-1}{3x+2}\right) \cdot \frac{1 \cdot (3x+2) - (x-1) \cdot 3}{(3x+2)^2} = 2 \left(\frac{x-1}{3x+2}\right) \cdot \frac{5}{(3x+2)^2} = \frac{10(x-1)}{(3x+2)^3}$

d) $l'(x) = \frac{3 \cdot (2x-1)^2 \cdot 2 \cdot (5x+1)^4 - (2x-1)^3 \cdot 4 \cdot (5x+1)^3 \cdot 5}{(5x+1)^8}$
 $= \frac{2(2x-1)^2(5x+1)^3[3(5x+1) - 10(2x-1)]}{(5x+1)^8} = \frac{2(2x-1)^2(-5x+13)}{(5x+1)^5}$

e) $m'(x) = \left(3(2\sin(x)\cos(x))^{\frac{1}{2}}\right)' = 3 \cdot \frac{1}{2}(2\sin(x)\cos(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot (2\cos(x)^2 - 2\sin(x)^2)$
 $= 3 \cdot \frac{\cos(x)^2 - \sin(x)^2}{\sqrt{2}\sqrt{\cos(x)\sin(x)}} = 3 \cdot \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$

f) $u'(x) = ((1-x)(x-3)^4)' = (-1) \cdot (x-3)^4 + (1-x) \cdot 4(x-3)^3 = (x-3)^3[-(x-3) + 4(1-x)]$
 $= (x-3)^3[-x+3+4-4x] = (x-3)^3(-5x+7)$

g) $v'(x) = ((x+x^2)^{-5})' = -5(x+x^2)^{-6} \cdot (1+2x) = \frac{-5(1+2x)}{(x+x^2)^6} = \frac{-5(1+2x)}{x^6(1+x)^6}$

h) $w'(x) = \left(\frac{(3x+1)^2}{(x+2)^3}\right)' = \frac{2(3x+1) \cdot 3 \cdot (x+2)^3 - (3x+1)^2 \cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6}$
 $= \frac{3(3x+1)(x+2)^2[2(x+2) - (3x+1)]}{(x+2)^6} = \frac{3(3x+1)(x+2)^2[2x+4-3x-1]}{(x+2)^6}$
 $= \frac{3(3x+1)(x+2)^2(-x+3)}{(x+2)^6} = \frac{3(3x+1)(-x+3)}{(x+2)^4}$

Exercice 2 (5 points)

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Comme $|x^2 \cos \frac{1}{x}| \leq x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on peut définir $f(0) = 0$.

c) On a

$$f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(-\sin \frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}.$$

d) On a

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}.$$

Or,

$$0 \leq \left| x \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, $f'(0) = 0$.

e) On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

qui diverge.

Exercice 3 (5 points)

La dérivée de f est

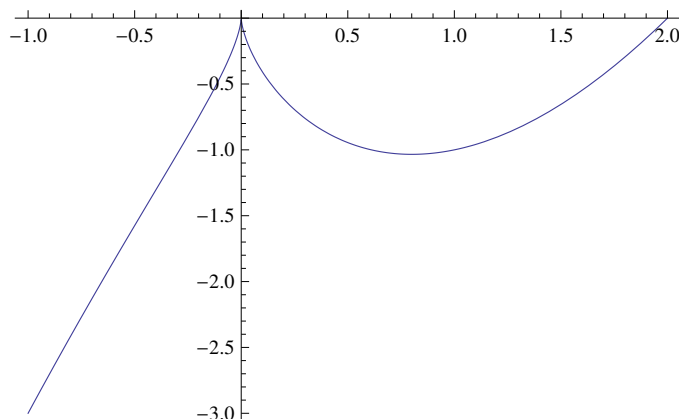
$$f'(x) = 1 \cdot x^{2/3} + (x - 2) \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{3x + 2(x - 2)}{3 \cdot x^{1/3}} = \frac{5x - 4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Ainsi, l'unique point stationnaire de f est $4/5$. Comme f est continue, les candidats possibles d'extrema sont donc

$$-1, \quad 0, \quad \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad 2.$$

Or, $f(-1) = -3$, $f(0) = f(2) = 0$ et $f\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{6}{5} \sqrt[3]{\frac{16}{25}}$.

Ainsi, f atteint son minimum (global) au point $x = -1$ et son maximum (global) aux points $x = 0$ et $x = 2$, comme on peut le vérifier sur le graphe :

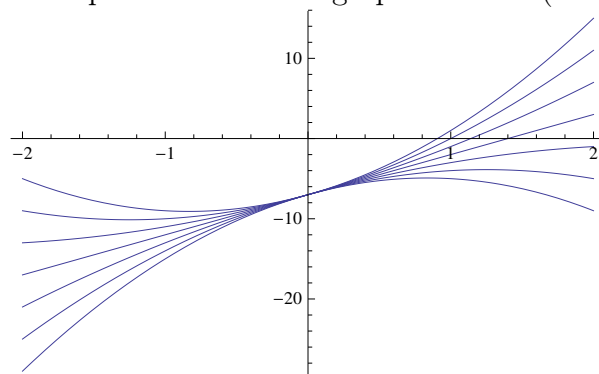


De plus, une simple étude du signe de la dérivée f' montre que f est croissante sur $[-2, 0]$, décroissante sur $]0, 4/5]$, puis à nouveau croissante sur $[4/5, 2]$. Ainsi le point $x = 4/5$ est un minimum local de f .

Exercice 4 (5 points)

On constate que les paraboles de cette famille n'ont que le point $(0, -7)$ en commun. En effet, si $a \neq b$ et $ax^2 + 5x - 7 = bx^2 + 5x - 7$, alors $x^2(a - b) = 0$ et donc $x = 0$. De plus, leurs dérivées en ce point valent toutes 5. Ainsi, elles sont tangentes entre elles.

On a représenté plusieurs de ces paraboles dans le graphe suivant (en laissant a varier de -3 à 3).

**Exercice 5** (10 points)

a) Vrai. Supposons que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ait en tout point une dérivée négative ($f' \leq 0$) et montrons que f est alors décroissante.

Soient $x, y \in [a, b]$ avec $x < y$. On doit vérifier qu'alors $f(x) \geq f(y)$.

Par le théorème des accroissements finis, il existe un point $c \in [x, y]$ tel que

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \leq 0.$$

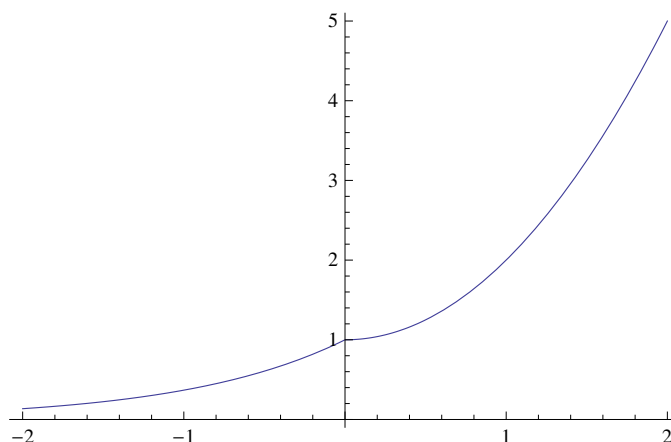
De cela, on déduit directement que

$$f(x) \geq f(y).$$

b) Faux. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que cette fonction n'admet pas de dérivée en $x = 0$; pourtant, il ne s'agit pas d'un extremum local.



c) Vrai. Si f et g sont deux fonctions réelles dérivables ayant la propriété $f' = g'$, alors $f' - g' = 0$, ce qui signifie que $f - g$ est une constante, donc

$$f - g = c$$

pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

Dès lors, comme la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x$$

a pour dérivée $x + 1$, toutes les autres fonctions ayant aussi $x + 1$ comme dérivée seront de la forme

$$\frac{1}{2}x^2 + x + c,$$

pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

d) Faux. On a

$$(\cos(x) + c)' = -\sin(x)$$

pour tout réel c .

e) Vrai. La continuité de f (conséquence de sa dérivabilité) implique que l'on peut étendre l'hypothèse de la manière suivante : f est croissante sur $] - \infty, 0]$ et décroissante sur $[0, \infty[$. Comme la dérivée de f existe en 0, on a que les deux limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

sont égales à $f'(0)$. Or

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \geq 0,$$

ainsi $0 \leq f'(0) \leq 0$.

Exercice 6 (5 points)

On utilise la règle de Bernoulli-L'Hospital tout au long de cet exercice sans la mentionner explicitement.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin(x) - \cos(x)}{\tan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{1 + \tan^2(x)} = 1.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x)}{2x + 3} = \frac{2}{3}.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{1 - 1/x}}{1/x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{1 - h}} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 7 (5 points)

a) Il faut voir que $g' < 0$ sur l'intervalle considéré. On a

$$g'(x) = 1 - (1 + \tan^2(x)) = -\tan^2(x) < 0$$

sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

b) On utilise à nouveau la dérivation :

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Or, sur l'intervalle considéré, la condition

$$x \cos(x) - \sin(x) < 0$$

revient à $x - \tan(x) < 0$, ce qui est vrai par le premier point.

c) L'inégalité se réécrit

$$\frac{\sin(b)}{b} < \frac{\sin(a)}{a}.$$

d) L'inégalité $\frac{b}{\sin(b)} < \frac{\pi}{2}$ découle du point 2 (direct), on a donc

$$\frac{b}{\sin(b)} < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \sin(a) < a.$$

En multipliant membre-à-membre, on conclut.

Exercice 8 (5 points)

On procède selon l'indication : on calcule

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a) \text{ et}$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a).$$

Ainsi, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

On calcule $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, donc $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Cela se réécrit $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Exercice 9 (5 points)

Soit f une fonction réelle dérivable s'annulant aux points

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1}$$

pour un $k \in \mathbb{N}$.

Pour $i = 1, \dots, k$, l'égalité $f(x_i) = f(x_{i+1})$ implique, par le théorème de Rolle, qu'il existe $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(c_i) = 0$. Ainsi, f' s'annule en au moins k points.

Supposons maintenant que f soit une fonction polynomiale de degré $n > 1$ et, par l'absurde, disons que f admet $n + 1$ racines distinctes. Alors on a successivement que f' admet n racines, que f'' admet $n - 1$ racines, etc.

On obtient finalement que $f^{(n-1)}$ admet $n + 1 - (n - 1) = 2$ racines, ce qui est absurde comme il s'agit d'une fonction affine.

Exercice 10 (5 points)

On commence par remarquer que si f admet trois racines alors, par un raisonnement similaire à celui exposé dans la question, on aura que sa dérivée admet deux racines. Cela contredirait le fait que comme la dérivée de f est

$$f'(x) = nx^{n-1} + a$$

et que $n - 1$ est impair, l'équation $f'(x) = 0$ n'admet qu'une unique solution réelle.