(*) $i_1 \cdot i_2$ est paire

$p_1 \cdot i_1$ est impaire

(**) $i_1 \circ i_2$ est impaire

$f \circ p_1$ est paire

$p_1 \circ i_1$ est paire

là où la composition est bien définie.

fin cours 31.10.2022

Examen blanc : • semaine du 14 au 18 novembre

• durée 1h (QCM, vrai/Faux, question ouverte)

• Programme : cours jusqu'à aujourd'hui

Démonstration :

(*) $\forall x \in D$, on a $i_1(-x) \cdot i_2(-x) = (-i_1(x)) \cdot (-i_2(x)) = i_1(x) \cdot i_2(x)$

Donc $i_1 \cdot i_2$ est paire.

(**) $\forall x \in D$, on a $i_1(i_2(-x)) = i_1(-i_2(x)) = -i_1(i_2(x))$

Donc $i_1 \circ i_2$ est impaire.

Exemples :

Fonctions paires : $x^2 = x \cdot x$, $\cos(x) + x^2$, $\sin(x^2)$, $\cos(\sin(x))$

Fonctions impaires : $\sin(x) + x$, $\sin(x^5)$

5.3 Périodicité

Def : Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite T-périodique ($T \in \mathbb{R}_+^*$) si $\forall x \in D$, $x + T \in D$ et $f(x+T) = f(x)$. (*)

($x' = x + T$: $f(x') = f(x' - T)$)

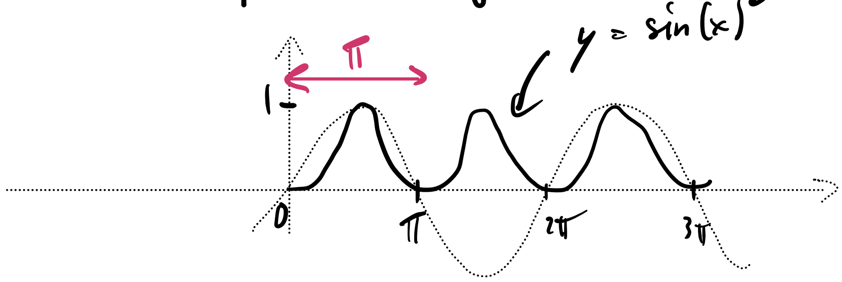
(On peut déduire de (*) que $\forall k \in \mathbb{N}$, $x + kT \in D$ et $f(x + kT) = f(x)$)

- T est appelé <u>une</u> période de f.
- le plus petit $T > 0$ satisfaisant $(*)$ est appelé <u>la</u> période de f

<u>Exemple</u> : $f(x) = \sin(x)^2$, $D(f) = \mathbb{R}$

2π, 4π, 3π, ... sont des périodes de f.

π est <u>la</u> période de f



<u>Prop</u> : Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions T_f (respectivement T_g) périodiques et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (quelconque). Alors :

- Si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$ (et donc $\frac{T_f}{T_g} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$) alors

  $f + g$ et $f \cdot g$ sont T-périodiques avec $T = pT_g = qT_f$.
- $h \circ f$ est T_f périodique.

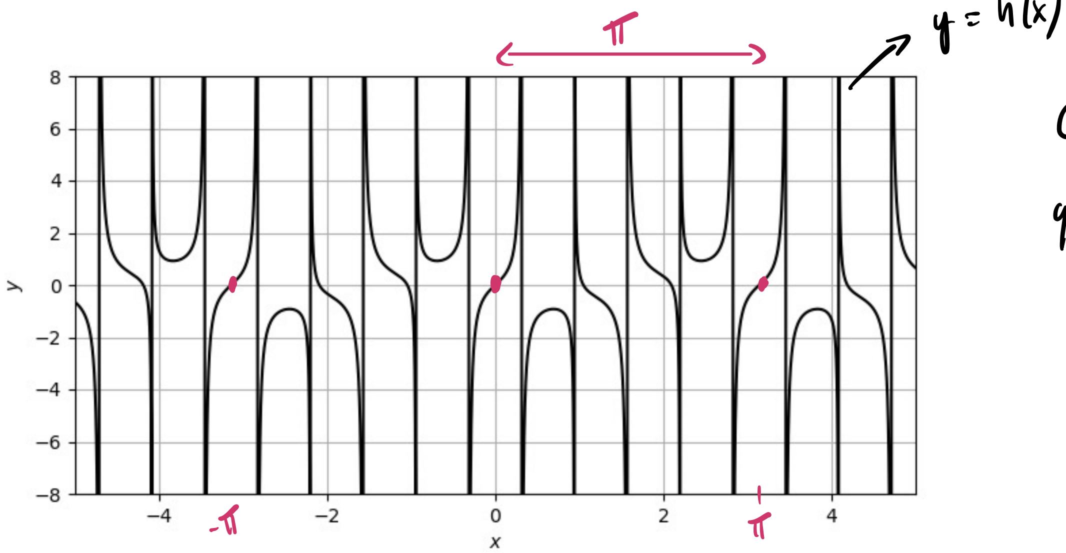
<u>Exemple</u> :

$$h(x) = \frac{\sin(3x)}{\cos(5x)} = f(x) \cdot g(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f(x) = \sin(3x) \\ g(x) = \cos(5x)^{-1} \end{cases}$$

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R},\ \cos(5x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R},\ 5x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

  $= \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10},\ k \in \mathbb{Z}\}$

- f est impaire, g est paire donc h est impaire
- La période de f est $T_f = \frac{2\pi}{3}$ et la période de g est $T_g = \frac{2\pi}{5}$.
- On a $\frac{T_f}{T_g} = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$ donc h est périodique de période 2π $(= 3T_f = 5T_g)$

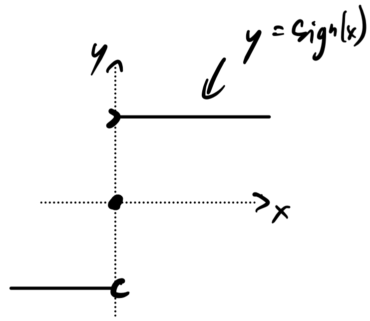


On observe que la période de h est π.

5.4 Fonctions définies par morceaux

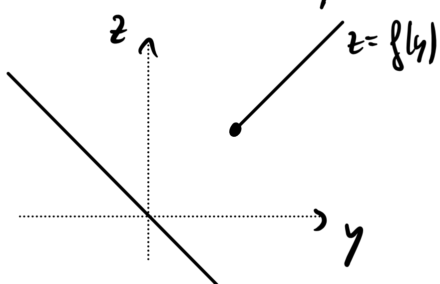
Exemple : la fonction signe : $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

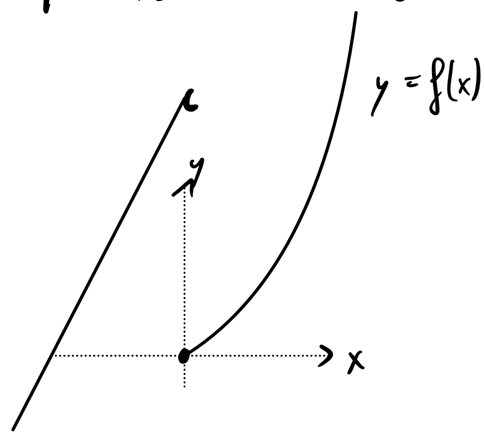
$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Composition (exemple) :

$$f(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 1 \\ -y & \text{si } y < 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x+3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$





Décrire $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$

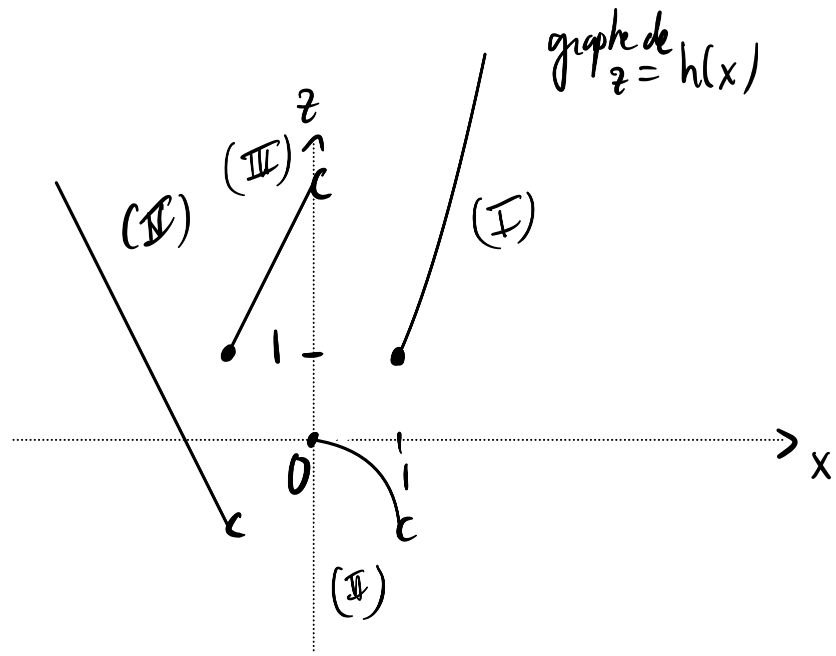
I. $x \geq 0$ et $g(x) \geq 1$

II. $x \geq 0$ et $g(x) < 1$

III. $x < 0$ et $g(x) \geq 1$

IV. $x < 0$ et $g(x) < 1$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \quad (\mathrm{I}) \\ -x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \quad (\mathrm{II}) \\ 2x+3 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \quad (\mathrm{III}) \\ -2x-3 & \text{si} \quad x < -1 \quad (\mathrm{IV}) \end{cases}$$



5.5. Limites de fonctions

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que $x_n \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x^*$

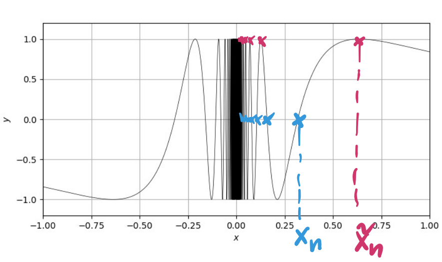
Que peut-on dire de la limite de la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$

En général : rien !

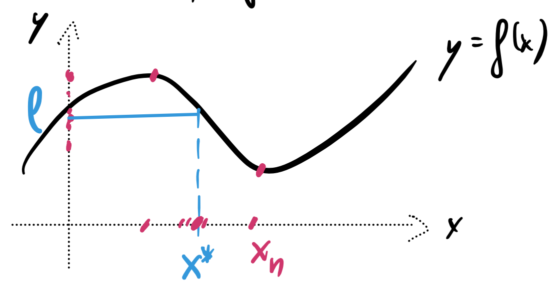
Exemple : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $D(f) = \mathbb{R}^*$

a) $x_n = \frac{1}{n\pi}$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \overbrace{\sin(\pi n)}^{=0} = 0$

b) $\tilde{x}_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \tilde{x}_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\tilde{x}_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \overbrace{\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}^{=1} = 1$



Def : On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x^* si pour toute suite (x_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$ et telle que $x_n \in D \setminus \{x^*\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite $(f(x_n))$ converge et
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell .$$

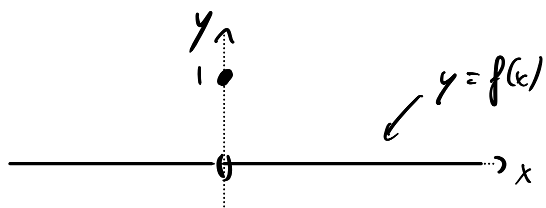


Notation : si f admet pour limite ℓ quand x tend vers x^*, on écrit
$$\boxed{\lim_{x\to x^*} f(x) = \ell}$$

(parfois on note aussi $\lim_{\substack{x\to x^* \\ x\neq x^*}} f(x) = \ell$)

Exemples :

1) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



Soit (x_n) une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ $(\neq f(0))$

Rmq : si $x^* \in D(f)$, il est possible que $\lim_{x\to x^*} f(x) \neq f(x^*)$.

2) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ avec $\begin{cases} p(x) = x^2 + 2x + 1 \\ q(x) = x + 1 \end{cases}$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\forall x \in D(f)$ on a $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)} = x + 1$

Soit $x^* = -1$

Pour toute suite (x_n) telle
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D(f)$, c-à-d. $x_n \neq -1$
- $\lim_{n\to+\infty} x_n = -1$

On a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n+1 = -1+1 = 0$

Donc $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$

3) On a vu $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

<u>Def</u> (Limites à droite et à gauche). On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet pour limite à droite (à gauche) $\ell_+ \in \mathbb{R}$ ($\ell_- \in \mathbb{R}$) quand x tend vers x^* si pour toute suite (x_n), $x_n \in D, \forall n \in \mathbb{N}$ et $x_n > x^*$ ($x_n < x^*$) et telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$, la suite $(f(x_n))$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell_+ \qquad \left(\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell_-\right).$$