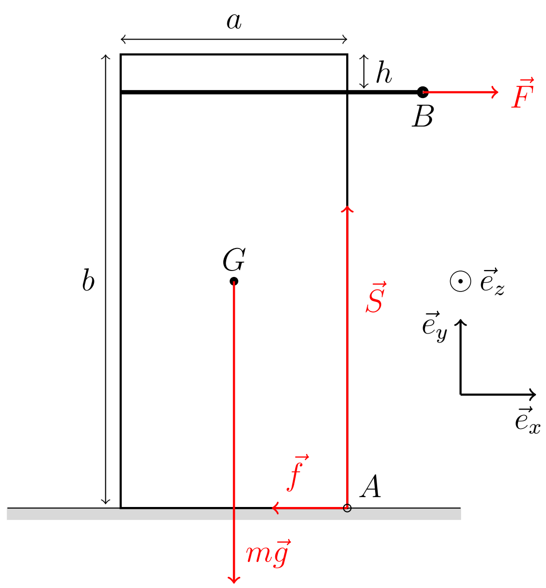
Corrigé préparatoire 8 : statique, théorème du moment cinétique

1 Théorème du moment cinétique : équilibre

L'objet que nous allons considérer est le bloc (supposé homogène). Ce dernier subit quatre forces : son poids $m\vec{g}$, la force $\vec{F}$ exercée par l'intermédiaire de la corde, le soutien $\vec{S}$ et le frottement $\vec{f}$ exercés par le sol.



A l'équilibre, les sommes des forces et des moments de force sont nulles (par rapport à tout point fixe O) :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \qquad \vec{M}_O = \vec{0}\,.$$

La loi de Newton

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = \vec{0}$$

est insuffisante pour trouver toutes les forces inconnues.
Le poids s'applique au centre de masse G et la force $\vec{F}$ en B. Lorsque le bloc de pierre pivote autour de A, le soutien $\vec{S}$ et le frottement $\vec{f}$ s'appliquent en A. En calculant les moments de force par rapport à A, ceux de $\vec{S}$ et $\vec{f}$ sont nuls.

$$\begin{aligned}
\vec{M}_A &= \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{M}_A(m\vec{g}) + \vec{M}_A(\vec{S}) + \vec{M}_A(\vec{f}) \\
&= \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g} + \underbrace{\overrightarrow{AA} \wedge \vec{S}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{AA} \wedge \vec{f}}_{\vec{0}} \\
&= \vec{0}\,.
\end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_z$,

$$-(b-h)F + \frac{a}{2}mg + 0 + 0 = 0\,.$$

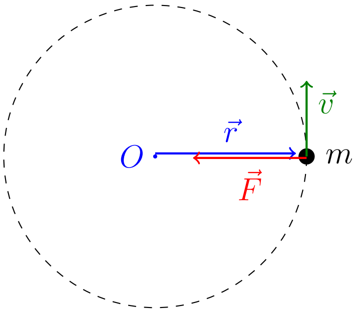
Cette dernière relation fournit directement la norme de la tension dans la corde :

$$F = \frac{amg}{2(b-h)} \cong 401.3\,\text{N}\,,$$

où l'on a posé $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.
Remarque : on est maintenant en mesure de déterminer $\vec{S}$ et $\vec{f}$ en exploitant la loi de Newton (ou en choisissant de calculer les moments par rapport à d'autres points, p.ex. le point sur la corde à la verticale de A).

2 Théorème du moment cinétique, loi de conservation

1. Le mouvement est circulaire uniforme. La résultante $\vec{F}$ des forces s'exerçant sur l'objet de masse m est centrale. En choisissant une origine O située au centre du cercle, le moment de cette force est nulle en tout temps : $\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

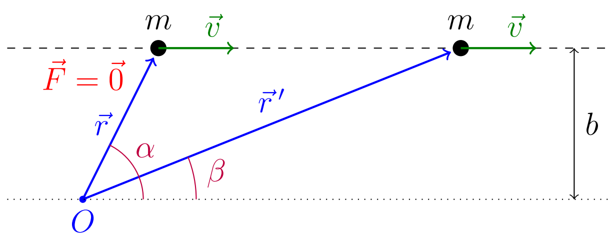


$|\vec{v}| = \text{constante} = v_0$ et

$|\vec{r}| = \text{constante} = r_0$

En accord avec le théorème du moment cinétique, le moment cinétique est donc conservé :
$$\frac{\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = \overrightarrow{constant}\,.$$
Remarquons que cette conclusion ($\vec{L}$ constant) n'est pas valable pour tout choix de l'origine O. En choisissant par exemple une origine située en-dessous du plan du cercle, on se convainc assez facilement que le vecteur moment cinétique n'est pas constant durant le mouvement. En effet, par rapport à cette nouvelle origine, le moment de la force qui maintient la masse sur sa trajectoire circulaire n'est pas nul.

2. Le mouvement est rectiligne uniforme. La résultante $\vec{F}$ des forces s'exerçant sur l'objet de masse m est donc nulle. Par conséquent, le moment de force par rapport à n'importe quelle origine O est nul en tout temps :
$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}\,.$$
En accord avec le théorème du moment cinétique, le moment cinétique est donc conservé :
$$\frac{\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = \overrightarrow{constant}\,.$$
Cette conclusion ($\vec{L}$ constant) reste vraie quelle que soit l'origine O choisie. Toutefois, la norme du moment cinétique est différente selon l'origine choisie. Ainsi, pour une origine située sur la trajectoire, le moment cinétique est par exemple constamment nul. Sa valeur dépend en fait de la distance b entre la trajectoire et une droite parallèle passant par l'origine :

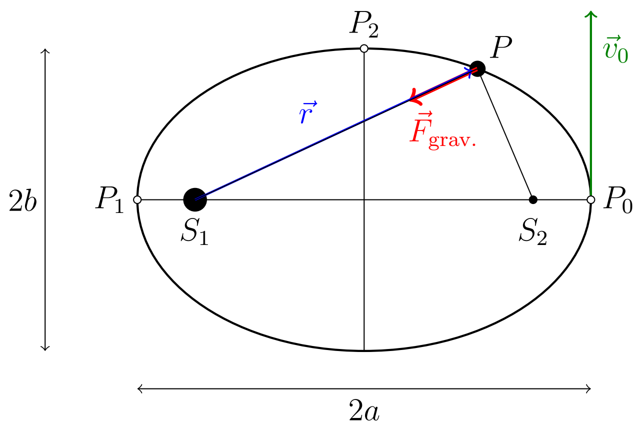


$$|\vec{v}| = \text{constante} = v_0 \quad \text{et} \quad |\vec{r}| \sin\alpha = b = |\vec{r}\,'| \sin\beta$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| v_0 \sin\alpha = b\, v_0 = |\vec{r}\,'| v_0 \sin\beta = |\vec{L}'|\,.$$

3 Théorème du moment cinétique, loi de Kepler

Nous allons exploiter le théorème du moment cinétique. La démarche est analogue à celle qui conduit à la deuxième loi de Kepler affirmant que la vitesse aréolaire d'une planète est constante.
Faisons l'hypothèse que la planète ne subit qu'une seule force : la force de gravitation $\vec{F}_{\text{grav.}}$ exercée par l'astre. Cette force est dirigée de la planète vers l'astre :



La force de gravitation $\vec{F}_{\text{grav.}}$ est une force centrale : elle est toujours dirigée vers le même point S_1. Par conséquent, le moment cinétique de la planète (réduite à son centre de masse) par rapport à S_1 est conservé :

$$\vec{L}_{S_1} = \overrightarrow{\text{constante}}\,.$$

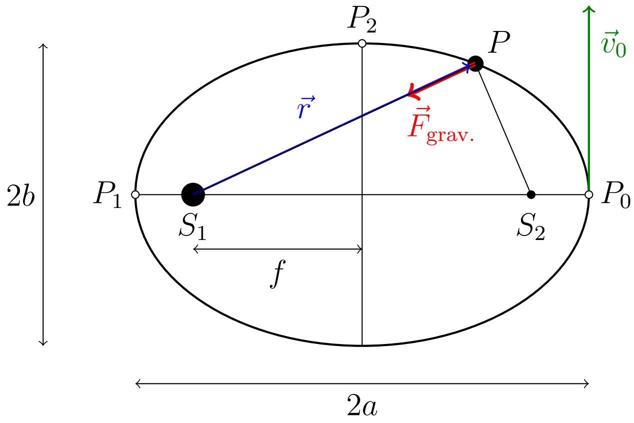
En effet, avec l'origine en S_1, les vecteurs position $\vec{r}$ et force $\vec{F}_{\text{grav.}}$ sont en tout temps parallèles. Le moment de la force est donc toujours nul :

$$\vec{M}_{S_1} = \vec{r} \wedge \vec{F}_{\text{grav.}} = \vec{0}\,.$$

Le théorème du moment cinétique permet alors d'affirmer que

$$\dot{\vec{L}}_{S_1} = \vec{M}_{S_1} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{L}_{S_1} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{\text{constante}}\,,$$

où m est la masse de la planète.
Pour pouvoir exploiter la conservation du moment cinétique durant le mouvement de la planète autour de l'astre, il est nécessaire de déterminer les vecteurs positions aux points P_1 et P_2. En particulier, nous allons avoir besoin de la distance f séparant l'astre du centre de l'ellipse.



En utilisant la contrainte $\overline{S_1P}+\overline{S_2P} = 2a$ définissant l'ellipse pour le point P_2, on constate que

$$f^2 + b^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad f = \sqrt{a^2 - b^2}\,.$$

La conservation du moment cinétique permet alors d'écrire, selon la direction perpendiculaire au plan du mouvement,

$$(a+f)mv_0 = (a-f)mv_1 = bmv_2\,.$$

Ainsi, les vitesses aux points P_1 (périhélie) et P_2 sont, respectivement, données par

$$v_1 = \frac{a+f}{a-f}v_0 = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}v_0 \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{a+f}{b}v_0 = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}v_0\,.$$

Numériquement, dans le cas de la Terre en orbite autour du Soleil, on obtient

$$v_1 = 30.29 \text{ km/s} \quad \text{et} \quad v_2 = 29.78 \text{ km/s}\,.$$