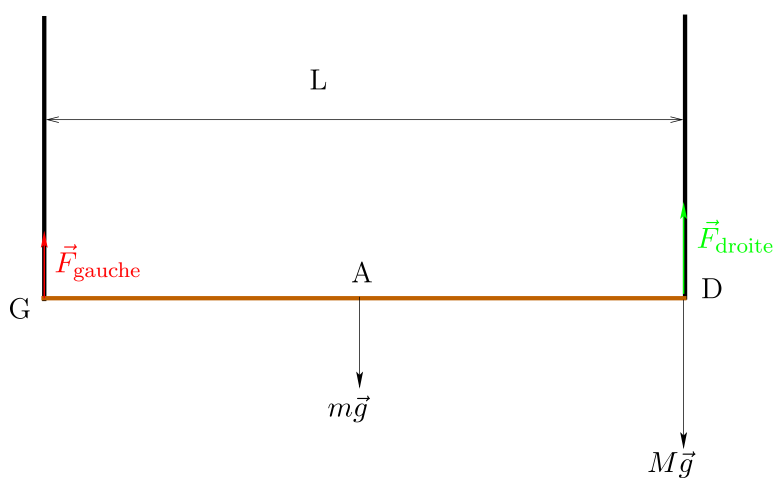
Corrigé Série 08 : Lois de Kepler, théorème du moment cinétique

Question conceptuelle

Le système formé de la nacelle et de Firmin étant à l'équilibre statique, la somme des forces et la somme des moments des forces (par rapport à n'importe quel point du référentiel) doivent toutes deux être nulles. Dans les trois situations décrites dans l'énoncé, toutes les forces qui s'appliquent sur le système sont verticales : il s'agit du poids de la nacelle $m\vec{g}$ et du poids de Firmin $M\vec{g}$, dirigés vers le bas, et des deux forces de soutien des câbles $\vec{F}_{\text{gauche}}$ et $\vec{F}_{\text{droite}}$, dirigées vers le haut et mesurées par les dynamomètres. Comme on doit avoir $M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{gauche}} + \vec{F}_{\text{droite}} = 0$, la force du dynamomètre de droite vaut toujours $F_{\text{droite}} = Mg + mg - F_{\text{gauche}}$.
Lorsque Firmin est situé au centre de la nacelle, les forces exercées par les câbles sont égales par symétrie. Le dynamomètre du côté droit doit alors indiquer, comme à gauche, $F_{\text{droite}} = F_{\text{gauche}} = 600\,\text{N}$. On peut également s'en convaincre en posant que la somme des moments des forces par rapport à un point au milieu de la nacelle vaut zéro. À ce stade on sait alors que la somme des poids vaut $Mg + mg = F_{\text{gauche}} + F_{\text{droite}} = 600 + 600 = 1200\,\text{N}$.
Lorsque le dynamomètre de gauche indique 400 N, celui de droite doit indiquer $F_{\text{droite}} = Mg + mg - F_{\text{gauche}} = 1200 - 400 = 800$ N.
Lorsque le dynamomètre de gauche indique 200 N juste avant que Firmin ne lâche prise, celui de droite doit indiquer $F_{\text{droite}} = Mg + mg - F_{\text{gauche}} = 1200 - 200 = 1000$ N.
Posons maintenant que la somme des moments des forces par rapport au point d'attache du câble de droite sur la nacelle est nulle (voir figure) :

$$\Sigma\vec{M}_D = \vec{0} = \underbrace{\overrightarrow{DD} \wedge \vec{F}_{\text{droite}}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{DD} \wedge M\vec{g}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{DA} \wedge m\vec{g}}_{mgL/2} + \underbrace{\overrightarrow{DG} \wedge \vec{F}_{\text{gauche}}}_{-F_{\text{gauche}}L},$$

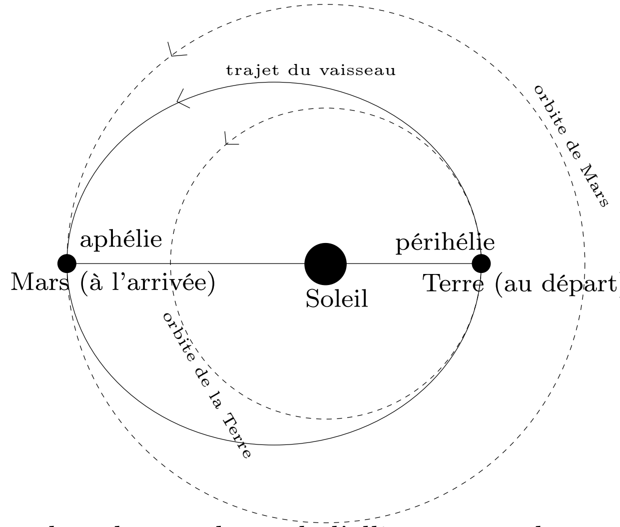
étant donné que les forces $M\vec{g}$ et $\vec{F}_{\text{droite}}$ n'ont pas de moment par rapport à ce point. On a donc $mg = 2F_{\text{gauche}}$.
Finalement, le poids de l'échafaudage vaut ainsi $mg = 400$ N et celui de Firmin $Mg = 1200 - 400 = 800$ N.



1 Voyage vers Mars

a) La période de révolution de Mars se calcule en utilisant la troisième loi de Kepler

$$\frac{(\text{période})^2}{(\text{grand axe})^3} = \text{constante.}$$



Soit T_T et T_M les périodes de révolution de la Terre et de Mars respectivement, on a

$$\frac{T_T^2}{(2R_T)^3} = \frac{T_M^2}{(2R_M)^3}$$

$$\Rightarrow \quad T_M = T_T \left(\frac{R_M}{R_T}\right)^{\frac{3}{2}} \simeq 1.874 \text{ années.}$$

On a utilisé le fait que les orbites sont circulaires et donc le grand axe de l'ellipse est égal au diamètre du cercle.

b) La vitesse de la Terre sur son orbite est donnée par

$$v_T = \Omega_T R_T = \frac{2\pi}{T_T} R_T = 2\pi \frac{1 \text{ u.a.}}{1 \text{ année}} = \frac{2\pi \times 149.6 \times 10^9}{365 \times 24 \times 3600} \simeq 29.8 \times 10^3 \text{ m/s} = 107300 \text{ km/h.}$$

Similairement, pour Mars

$$v_M = \Omega_M R_M = \frac{2\pi}{T_M} R_M \simeq 24.2 \times 10^3 \text{ m/s} = 87120 \text{ km/h.}$$

c) On calcule la durée du voyage en utilisant à nouveau la troisième loi de Kepler

$$\frac{(T_T)^2}{(2R_T)^3} = \frac{(T_{\text{vaisseau}})^2}{(A)^3},$$

où $A = R_T + R_M$ est le grand axe de l'ellipse. La période du vaisseau est donc donnée par

$$T_{\text{vaisseau}} = T_T \left(\frac{R_T + R_M}{2R_T}\right)^{\frac{3}{2}} \simeq 1.414 \text{ années.}$$

Pour atteindre Mars, on parcourra la moitié de cette orbite. La durée du voyage T_{voyage} sera donc égale à 0.707 années, c'est-à-dire 258 jours.

d) Pour déterminer les vitesses au départ v_{dep} et à l'arrivée v_{arr}, nous avons besoin de deux équations. La première est la conservation du moment cinétique du vaisseau par rapport au Soleil entre le point de départ et le point d'arrivée (en effet, par hypothèse le vaisseau ne subit que la force d'attraction du Soleil, qui est centrale). Ceci donne :

$$R_T m v_{\text{dép}} = R_M m v_{\text{arr}} \longrightarrow \frac{v_{\text{arr}}}{v_{\text{dép}}} = \frac{R_T}{R_M} \tag{1}$$

où m est la masse du vaisseau. La deuxième équation est la conservation de l'énergie mécanique du vaisseau entre le point de départ et le point d'arrivée :

$$\frac{1}{2} m v_{\text{dép}}^2 - \frac{GMm}{R_T} = \frac{1}{2} m v_{\text{arr}}^2 - \frac{GMm}{R_M},$$

que l'on récrit

$$\frac{1}{2}\left(v_{\text{dép}}^2 - v_{\text{arr}}^2\right) = GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_M}\right), \tag{2}$$

où M est la masse du Soleil.

— Vitesse de départ : En combinant les équations (1) et (2), on trouve

$$\frac{1}{2}v_{\text{dép}}^2\left(1 - \frac{R_T^2}{R_M^2}\right) = GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_M}\right),$$

qui se récrit, en utilisant $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$\frac{1}{2}v_{\text{dép}}^2 R_T^2\left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_M}\right) = GM. \tag{3}$$

D'autre part, on peut exprimer le terme de droite dans l'équation (4) grâce à la projection de la deuxième loi de Newton le long du vecteur radial appliquée au système "Terre" soumis à la force gravitationnelle exercée par le Soleil :

$$M_T\frac{v_T^2}{R_T} = \frac{GM_T M}{R_T^2} \longrightarrow GM = R_T v_T^2 \tag{4}$$

(où M_T est la masse de la Terre).
En combinant (3) et (4) on trouve

$$v_{\text{dép}} = v_T\sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R_T}{R_M}}}. \tag{5}$$

— Vitesse d'arrivée : on fait le même raisonnement que pour la vitesse de départ. On combine les équations (1) et (2) pour exprimer la vitesse d'arrivée :

$$\frac{1}{2}v_{\text{arr}}^2 R_M^2\left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_M}\right) = GM. \tag{6}$$

L'équation (4) est valable pour Mars aussi

$$M_M\frac{v_M^2}{R_M} = \frac{GM_T M_M}{R_M^2} \longrightarrow GM = R_M v_M^2 \tag{7}$$

(où M_M est la masse de la Mars).
On combine (6) et (7) pour obtenir :

$$v_{\text{arr}} = v_M\sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R_M}{R_T}}}. \tag{8}$$

— La vitesse à donner au vaisseau au départ *par rapport à la Terre* est la différence entre la vitesse orbitale v_{dep} et la vitesse de la Terre v_T :

$$\Delta v_{\text{dép}} = v_{\text{dép}} - v_T = v_T\left(\sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R_T}{R_M}}} - 1\right).$$

De même, à son arrivée sur Mars, il faudra modifier la vitesse du vaisseau de

$$\Delta v_{\text{arr}} = v_M - v_{\text{arr}} = v_M \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\frac{R_M}{R_T}}}\right).$$

Numériquement, la vitesse qu'il faut donner au vaisseau au départ vaut

$$\Delta v_{\text{dép}} = v_{\text{dép}} - v_T \simeq +2.928 \text{ km/s}.$$

Et à l'arrivée sur Mars, il faudra modifier sa vitesse de

$$\Delta v_{\text{arr}} = v_M - v_{arr} \simeq +2.636 \text{ km/s}.$$

On remarque que dans les deux cas, le vaisseau doit être accéléré !

2 L'échelle

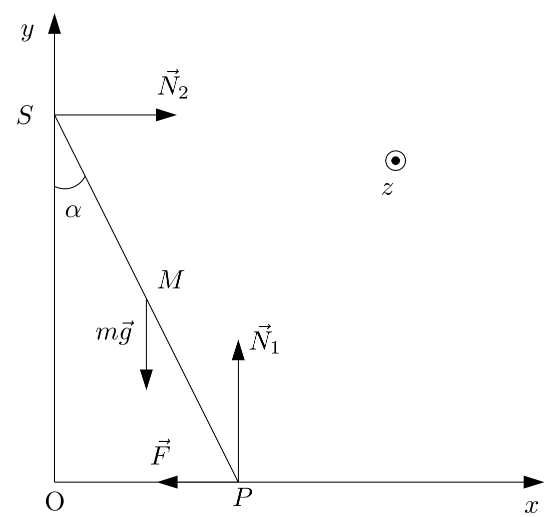
Les forces qui s'appliquent sur l'échelle sont

— Son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{e}_y$, vertical, dirigé vers le bas. Son point d'application est au centre de masse (milieu) de l'échelle.

— La force de soutien du sol $\vec{N}_1 = N_1\hat{e}_y$, perpendiculaire au sol.

— La force de soutien du mur $\vec{N}_2 = N_2\hat{e}_x$, perpendiculaire au mur.

— La force de frottement entre le pied de l'échelle et le sol $\vec{F}$, parallèle au sol. Elle est dirigée vers la gauche car le pied de l'échelle tend à glisser vers la droite : $\vec{F} = -F\hat{e}_x$ s'oppose à cette glissade.



À noter que mg, N_1, N_2 et F désignent les normes des vecteurs correspondants.

Lorsque $\alpha < \alpha_{\max}$, le système est à l'équilibre, la deuxième équation de Newton s'écrit : $m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F} = 0$. En projection sur le repère Oxy du dessin, on a

$$\text{Sur } x : -F + N_2 = 0 \tag{9}$$
$$\text{Sur } y : N_1 - mg = 0 \tag{10}$$

Les équations (9) et (10) forment un système de 2 équations à 3 inconnues. Pour résoudre complètement le problème, il faut également utiliser le théorème du moment cinétique. Un moment de force est défini par rapport à un point quelconque du référentiel. Un choix possible est le point de contact au sol de l'échelle P.

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \Sigma\vec{M}_P.$$

Comme l'échelle est immobile, cette équation donne $\Sigma\vec{M}_P = \vec{0}$. Dans ce cas, la somme des moments s'écrit

$$\Sigma\overrightarrow{M}_P = \overrightarrow{PM} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{PS} \wedge \vec{N}_2. \tag{11}$$

Tous les vecteurs entrant en jeu dans (11) sont dans le plan contenant l'échelle et le mur (le plan de la feuille sur notre dessin). Le moment de chaque force, et donc la somme des moments, est orthogonal à ce plan, et donc parallèle à l'axe z. Le signe de chaque terme est donné par la règle de la main droite. En d'autres termes, si le moment "a tendance" à faire tourner l'échelle dans le sens des aiguilles d'une montre, son signe est négatif, sinon il est positif. Enfin, si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, la norme de $\vec{w}$ est donnée par $||\vec{w}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}|| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
La projection sur l'axe z est donc finalement

$$\Sigma M_P = \frac{L}{2} mg \sin\alpha - L N_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 0, \tag{12}$$

qui devient, en utilisant l'équation (9),

$$F = \frac{mg \tan\alpha}{2}. \tag{13}$$

Ceci reste vrai tant que

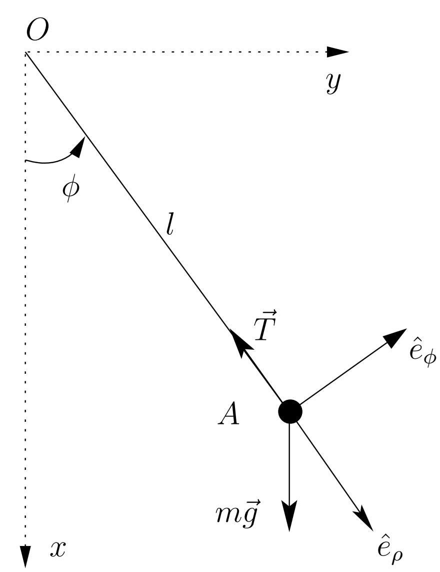
$$F < F^{\max} = \mu N_1,$$

auquel cas le pied de l'échelle se met à glisser. À la limite, on a

$$F^{\max} = \frac{mg \tan\alpha_{\max}}{2} = \mu mg$$

$$\Rightarrow \alpha_{\max} = \arctan(2\mu). \tag{14}$$

3 Encore l'araignée



Les forces qui s'appliquent sur l'araignée sont

— son poids $m\vec{g}$, dirigé vers le bas,

— la tension dans le fil $\vec{T}$, dirigée vers le point d'attache du fil O.

Par rapport au point O, le moment de $\vec{T}$ est nul car $\vec{T}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OA}$. Le moment de $m\vec{g}$ par rapport au point O vaut

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{g}.$$

Dans un repère associé aux coordonnées cylindriques (voir dessin), le moment s'écrit

$$\vec{M}_O = l\hat{e}_\rho \wedge mg(\cos\phi\ \hat{e}_\rho - \sin\phi\ \hat{e}_\phi) = -mgl\sin\phi\ \hat{e}_z\,. \tag{15}$$

Le moment cinétique de l'araignée par rapport au point O s'écrit :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v} = l\hat{e}_\rho \wedge ml\dot{\phi}\ \hat{e}_\phi = ml^2\dot{\phi}\ \hat{e}_z, \tag{16}$$

où l'on a utilisé l'expression pour la vitesse $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z$, et le fait que $\rho = l =$ constante et $z = 0$.
Le théorème du moment cinétique s'exprime comme suit :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O\ ,$$

dans lequel on introduit les équations (17) et (18) :

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\phi}) = ml^2\ddot{\phi} = -mgl\sin\phi \ ,$$

qui se récrit :

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\phi, \tag{17}$$

qui est bien l'équation du mouvement d'un pendule.