EPFL

Cinquième partie

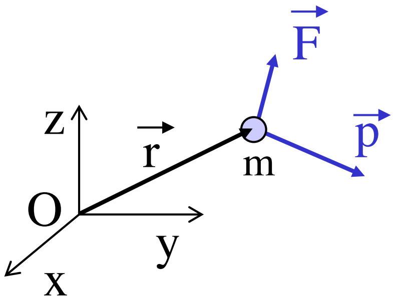
Système de points matériels, lois de conservation

p 41, Section 1.17
p 27, Section 1.12
p 116, Section 2.12

- Notions abordées
  - 2ème loi de Newton et théorème du moment cinétique
  - Systèmes de points matériels: énoncé général de la 3ème loi de Newton
  - Centre de masse, théorème du centre de masse
  - Lois de conservation pour un système isolé
  - Chocs et collisions

- But:
  - Assimiler et appliquer les principes de la mécanique

$2^{\text{ème}}$ loi de Newton et théorème du moment cinétique



- Résultante des Forces

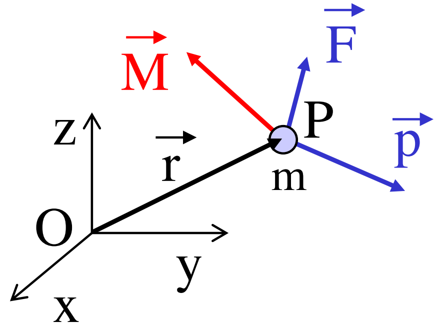
$$\vec{F} = \sum \vec{F_i}$$

- Quantité de mouvement

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- *2ème Loi de Newton*

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$



$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

- Moment de la résultante des forces par rapport au point O

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F_i}$$

- Moment cinétique par rapport au point O

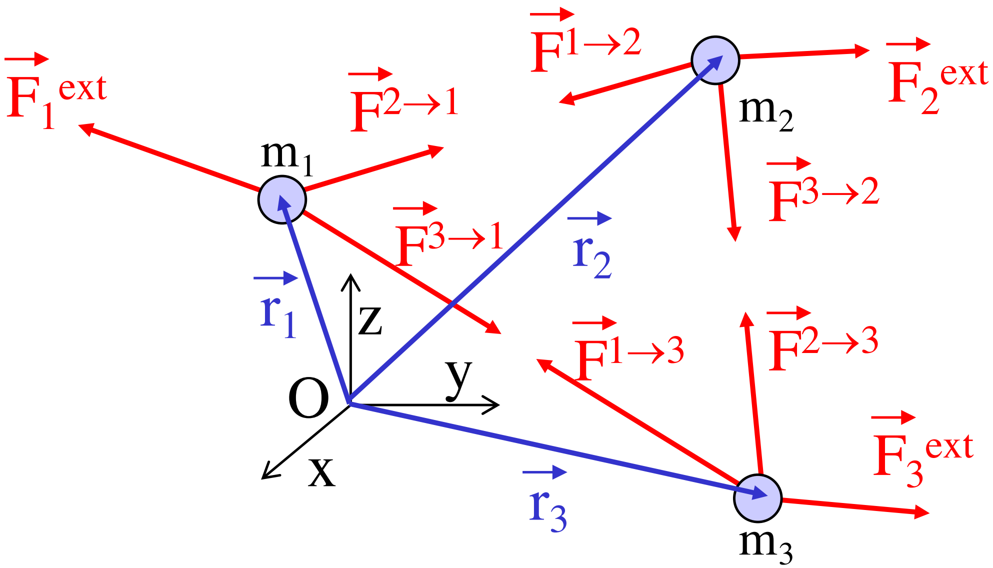
$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

- *Théorème du moment cinétique*

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O}$$

On désigne l'ensemble de ces deux lois comme '*équations du mouvement*'

Système de points matériels



- Forces *extérieures*: exercées depuis l'extérieur du système
- Forces *intérieures*: exercée par une partie du système sur une autre

Dans un problème de mécanique il est très important de spécifier clairement le système pour faire cette distinction

- 3ème loi de Newton: action et réaction sont égales, opposées et de même support

Système de points matériels

- Formulation mathématique de la 3ème loi:

$$\vec{F}^{\alpha\to\beta} + \vec{F}^{\beta\to\alpha} = 0$$

$$\vec{M}^{\beta\to\alpha} + \vec{M}^{\alpha\to\beta} = \vec{r}_\alpha \wedge \vec{F}^{\beta\to\alpha} + \vec{r}_\beta \wedge \vec{F}^{\alpha\to\beta} = \vec{0}$$

- Enoncé général:

$$\begin{cases} \sum_\alpha \sum_{\alpha\neq\beta} \vec{F}^{\alpha\to\beta} & = & 0 \\ \sum_\alpha \sum_{\alpha\neq\beta} \vec{M}_0^{\alpha\to\beta} & = & 0 \end{cases}$$

- La somme des forces intérieures est nulle
- La somme des moments des forces intérieures est nulle

EPFL

Equations du mouvement

- Lois générales pour un système de points matériels

  - Quantité de mouvement totale $$\boxed{\vec{p} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_\alpha \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = \sum_\alpha \left(\sum_{\alpha \neq \beta} \vec{F}^{\beta \to \alpha} + \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} \right) = \vec{F}^{\text{ext}}$$

  - Moment cinétique total $$\boxed{\vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{L}_{O,\alpha}}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_\alpha \frac{d\vec{L}_{\alpha,O}}{dt} = \sum_\alpha \left(\sum_{\alpha \neq \beta} \vec{M}_O^{\beta \to \alpha} + \vec{M}_{\alpha,O}^{\text{ext}} \right) = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

  - Lois générales:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}}$$

Lois de conservation

Tabouret tournant
https://youtu.be/yfwb39VCNcQ

Voiture à boulets
https://youtu.be/BT99PTEFtAM

- Pour un système isolé (pas de forces extérieures)

Lois de conservation fondamentales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{p} & = & \text{Constante} \\ \vec{L}_O & = & \text{Constante} \end{array} \right.$$

- Pour des forces conservatives

$$E = \text{Constante}$$

- Ce sont des lois plus générales que le cadre de la mécanique, qui traduisent les propriétés fondamentales de l'espace et du temps
- Permettent de résoudre de façon simple certains problèmes complexes
- Exemples:
  - Voiture à boulets
  - Chocs élastiques, chocs mous
  - Tabouret tournant

Lois de conservation

- Pour un système partiellement isolé (dans la direction $\hat{u}$ uniquement)

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \hat{u} = 0 & \Longrightarrow \quad \vec{p} \cdot \hat{u} = \text{cte} \\ \vec{M}_{O,\text{ext}} \cdot \hat{u} = 0 & \Longrightarrow \quad \vec{L}_O \cdot \hat{u} = \text{cte} \end{cases}$$

EPFL

Système à l'équilibre statique

- Condition d'équilibre: pour tout point du système

$$\begin{cases} \vec{r}_\alpha(t) & = & \text{cte} \\ \vec{v}_\alpha & = & 0 \end{cases}$$

- Dans ce cas pour tout point O du système:

$$\begin{cases} \sum_\alpha \vec{p}_\alpha & = & 0 \\ \sum_\alpha \vec{L}_{O,\alpha} & = & 0 \end{cases}$$

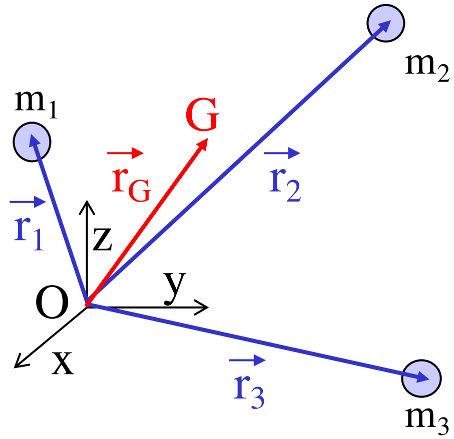
- Donc

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{ext}} & = & 0 \\ \vec{M}_{O,\text{ext}} & = & 0 \end{cases}$$

Conditions d'équilibre pour un système de points matériel (par exemple un solide)

EPFL

Centre de masse



- ou centre d'inertie, ou centre de gravité

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}$$

- Si les *masses sont constantes*, la vitesse du centre de masse est

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} = \frac{\vec{p}}{M} \implies \vec{p} = M\vec{v}_G$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_G}$$

Théorème du centre de masse:

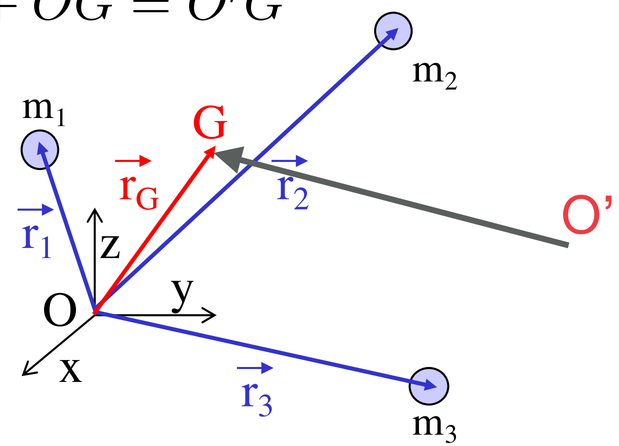
Le centre de masse se comporte comme un point matériel de masse M subissant toutes les forces extérieures appliquées sur les parties du système, comme si ces forces lui étaient appliquées directement

Propriétés du centre de masse

- Indépendance par rapport à l'origine :

  Soit *G* (*G'*) le centre de masse par rapport à l'origine *O* (*O'*)

$$\vec{O'G'} = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{O'P}_\alpha = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{O'O} + \vec{OP}_\alpha\right) = \vec{O'O} + \vec{OG} = \vec{O'G}$$

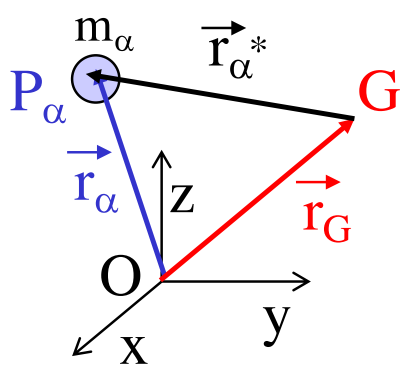


Donc *G'* = *G*

- Cas particulier: *référentiel du centre de masse* = origine au centre de masse

$$\sum_\alpha m_\alpha \vec{GP}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{GO} + \vec{OP}_\alpha\right) = 0$$

$$\sum_\alpha m_\alpha \frac{d\vec{GP}_\alpha}{dt} = \sum_\alpha m_\alpha \left(\frac{d\vec{GO}}{dt} + \frac{d\vec{OP}_\alpha}{dt}\right) = 0$$



La somme des quantités de mouvement dans le référentiel du centre de masse est nulle

Résumé

Les 3 Lois de Newton

1. Loi d'inertie

Mouvement rectiligne uniforme $\Leftrightarrow \vec{F} = 0$

Défini les bons référentiels pour la deuxième loi, référentiels *d'inertie*

2. Loi fondamentale de la dynamique

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{p} = m\vec{v}$$

Introduit les grandeurs physiques importantes. Entraine le *théorème du moment cinétique*

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}, \begin{cases} \vec{L}_O = m\vec{r} \wedge \vec{v} \\ \vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} \end{cases}$$

3. Loi de l'action et de la réaction

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

Propriété générale des forces: dans un système la somme des forces et des moments internes est nulle

La deuxième loi et le théorème du moment cinétique sont valables en ne considérant que les forces extérieures au système

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

Relativité Galiléenne:
les intervalles de temps et d'espace sont les même dans tous les référentiels
les lois de la mécanique sont les même dans tous les référentiels d'inertie