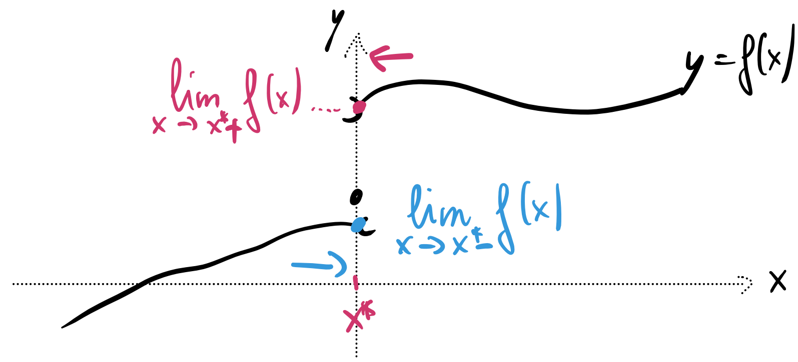
On a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n + 1 = -1 + 1 = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$

3) On a vu $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

Def (Limites à droite et à gauche). On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet pour limite à droite (à gauche) $\ell_+ \in \mathbb{R}$ ($\ell_- \in \mathbb{R}$) quand x tend vers x^* si pour toute suite (x_n), $x_n \in D, \forall n \in \mathbb{N}$ et $x_n > x^*$ ($x_n < x^*$) et telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x^*$, la suite $(f(x_n))$ converge et

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell_+ \qquad \left(\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell_- \right).$$



Notation:

$$\lim_{x \to x^*_+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x^* \\ x > x^*}} f(x) = \ell_+ \quad : \text{limite à droite}$$

$$\lim_{x \to x^*_-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x^* \\ x < x^*}} f(x) = \ell_- \quad : \text{limite à gauche}$$

Prop:

$$\lim_{\substack{x \to x^* \\ x > x^*}} f(x) = \ell_+ = \ell_- = \lim_{\substack{x \to x^* \\ x < x^*}} f(x)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = \ell_+ = \ell_-$$

Prop (propriétés algébriques sur les limites).

Si $\lim_{x \to x^*} f(x) = a$ et $\lim_{x \to x^*} g(x) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$

alors :
- $\lim_{x \to x^*} f(x) + g(x) = a + b$
- $\lim_{x \to x^*} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$
- si $b \neq 0$, $\lim_{x \to x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

(se déduit des propriétés algébriques des limites de suites).

Exemple : $\lim_{x \to 2} 3x^2 - 2x + 5 = 3 \cdot \left(\lim_{x \to 2} x\right)^2 - 2 \lim_{x \to 2} x + 5$

$= 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 13$

"Limites infinies" et comportement en $\pm\infty$

1) $\lim_{x \to x^*} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) veut dire que pour toute suite (x_n) telle que $x_n \in D(f) \setminus \{x^*\}$ et $\lim_{n \to +\infty} x_n = x^*$ on a $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$ (ou $-\infty$)

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell^{\in \mathbb{R}}$ (resp. $-\infty$ ou $+\infty$) veut dire que pour toute suite (x_n) telle que $x_n \in D(f)$ et $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ on a

$\lim f(x_n) = \ell$ (resp. $-\infty$ ou $+\infty$).

3) Convention analogue pour $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Théorème des deux gendarmes pour les fonctions

Soient $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Et soit $x^* \in \mathbb{R}$ tel que il existe (au moins) une suite (x_n) telle que $x_n \in D \setminus \{x^*\}$ et $\lim_{n \to +\infty} x_n = x^*$.

Supposons que :

(i) $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in D$, tel que $0 < |x - x^*| \leq \varepsilon$, on a

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

(ii) $\lim_{x \to x^*} f(x) = \lim_{x \to x^*} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Alors $\lim_{x \to x^*} g(x) = \ell$

<u>Remarque</u> : on peut donner un théorème analogue pour $\ell = \pm\infty$ ou pour $x^* = \pm\infty$.

Par exemple, si $x^* = +\infty$, il faut remplacer (i) par $\exists M > 0$, tel que $\forall x \in D$, $x \geq M$ on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

<u>Démonstration du Thm :</u>

Soit (x_n) une suite t.q $x_n \in D \setminus \{x^*\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \to +\infty} x_n = x^*$

Par définition de $\lim_{n \to +\infty} x_n = x^*$, on a que $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $0 < |x_n - x^*| \leq \varepsilon$.

Par (i), $\forall n \geq N$, $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$.

$$\underbrace{f(x_n)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell} \leq g(x_n) \leq \underbrace{h(x_n)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell} \quad \text{(par (ii))}$$

Donc par le Thm des gendarmes pour les suites, $\lim_{n \to +\infty} g(x_n) = \ell$.

Exemple :

1) Etudions $\lim_{x \to +\infty} \overbrace{\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)}^{f(x)}$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right)$$

(! Pensez à la technique de la racine conjuguée !)

Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \dfrac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x} + x}$

Comme $x^2 \leqslant x^2 + x \leqslant x^2 + 2x + 1$, on a $x \leqslant \sqrt{x^2+x} \leqslant \sqrt{(x+1)^2} = x+1$

Donc $f(x) \leqslant \dfrac{x}{x+x} = \dfrac{1}{2} = g(x)$

$f(x) \geqslant \dfrac{x}{(x+1)+x} = \dfrac{1}{2 + 1/x} = h(x)$

On a $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \dfrac{1}{2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}} = \dfrac{1}{2}$

Donc par le théorème des gendarmes $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ ■

2) Autres limites à connaître : $\begin{cases} \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e = \exp(1) \end{cases}$ (démonstration plus tard)

$\left[\exp\left(\frac{1}{x}\log(1+x)\right) = \exp\left(\frac{x + o(x)}{x}\right) = \exp\left(1 + o(1)\right)\right]$ Plus tard

__Quelques croissances comparées en $+\infty$__

On a $\forall \alpha, \beta$ tels que $0 < \alpha < \beta$ et $\forall a, b$ tels que $1 < a < b$:

$$\boxed{1 \ll \mathrm{Log}(x) \ll x^\alpha \ll x^\beta \ll a^x \ll b^x}$$

où "$f(x) \ll g(x)$" signifie que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

se lit "f est asymptotiquement négligeable devant g en $+\infty$".

Exemple : • $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^{100}}{e^x} = 0$ car $x^{100} \ll e^x$

• $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{Log}(x^{100})}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{100\,\mathrm{Log}(x)}{\sqrt{x}} = 0$ car $\mathrm{Log}(x) \ll \sqrt{x}$.

Definition de la limite "avec ε et δ"

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ et $x^* \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe (x_n) telle que $\begin{cases} x_n \in D \setminus \{x^*\} \\ \lim_{n \to +\infty} x_n = x^* \end{cases}$.

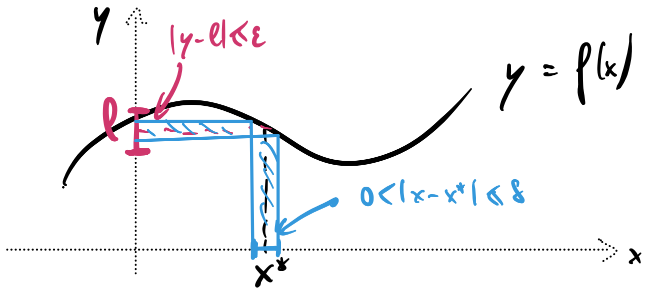
(Definition équivalente à la définition de la limite plus haut)

Def : f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x^* ssi
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D$:

$$0 < |x - x^*| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

① Choisir $\varepsilon > 0$

② On trouve $\delta > 0$



5.6 Fonctions continues

Definition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$, soit $x_0 \in D$ tel que $\exists \delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset D$.
On dit que f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$