Test 2 - Dérivée 24.11.21

Nom: ______________________ Prénom: ______________________

Le test dure 90 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire sur une feuille séparée.

Exercice 1. *(14 points)*

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1 + 2\ln(x)}{x}$

a) Étudier le domaine de définition et le signe de f.

b) Déterminer les asymptotes de f.

c) Étudier la croissance (avec coordonnées des éventuels extrema) de f.

Exercice 2. *(14 points)*

a) Calculer les limites suivantes.

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2-4}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

b) Calculer les dérivées suivantes avec la méthode de votre choix.

1) $f(x) = \sqrt{x + \sin(x)}$ 2) $g(x) = (2-x)^3 \cdot \cos(2x)$ 3) $h(x) = \dfrac{e^{-5x}}{x}$

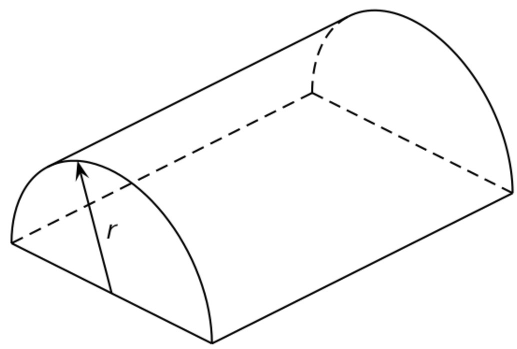
c) Déterminer l'intégrale indéfinie de $f(x) = \cosh(x^2) \cdot 3x$.

Exercice 3. *(7 points)*

Déterminer les valeurs de a, b et c telles que la fonction $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x+c}$ passe par le point $A(1;3)$, qu'elle admette une asymptote en $x = -3$ et est telle que la pente de sa tangente au point $x = 0$ soit égale à -1.

Exercice 4. *(12 points)*

On souhaite construire une serre de 3750 m^3 de volume. On réalise pour cela deux parois verticales en forme de demi-disques de rayon r (en m) dont le prix est de 35 fr./m^2 et un toit rectangulaire dont le prix est de 15 fr./m^2, que l'on recourbe comme indiqué sur la figure ci-dessous. On obtient ainsi une serre en forme de demi-cylindre.



a) Montrer que le coût total de cette serre en fonction du rayon r des parois est donné par

$$C(r) = \frac{35\pi r^3 + 112500}{r}.$$

b) Déterminer les dimensions de la serre de coût minimal et déterminer ce coût.

Exercice 5. *(7 points)*

a) Enoncer le théorème des accroissements finis.

b) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue défnie sur un intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable en tout point de $]a;b[$. Montrer que si $f'(x) \geq 0$, alors f est une fonction croissante.

Exercice 6. *(7 points)*

On considère la fonction $f : [-2;1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{x^2}$. Trouver tous les extrema locaux ainsi que les extrema globaux de cette fonction.