

Corrigé série 8

Exercice 1 (10 points)

a) En utilisant trois fois la règle de Bernoulli-L'Hospital, on voit que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 \cos(2x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + 4 \sin(2x)}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x + 8 \cos(2x)}{\cos x} = 6. \end{aligned}$$

b) En fait, on peut évaluer la fonction $\frac{\sin x}{1 - \cos x}$ au point $x = \pi$. Ainsi, par continuité, on a

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{\sin \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0.$$

c) En utilisant trois fois Bernoulli-L'Hospital, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}.$$

d) En utilisant une fois Bernoulli-L'Hospital, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 8}{2x} = 0.$$

e) On utilise ici la règle de Bernoulli-L'Hospital sans la mentionner explicitement.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos(x))}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin(1 - \cos(x))}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(1 - \cos(x)) \sin(x)^2 + \cos(x) \sin(1 - \cos(x))}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)[-3 \cos(x) \cos(1 - \cos(x)) + (1 + \sin(x)^2) \sin(1 - \cos(x))]}{24x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(x)^2 \cos(1 - \cos(x)) - \cos(1 - \cos(x)) \sin(x)^2 (4 + \sin(x)^2)}{24} \\ &\quad + \frac{\cos(x)(-4 + 3 \cos(2x)) \sin(1 - \cos(x))}{24} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

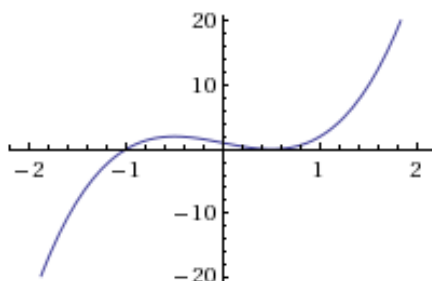
f) Pour cette limite, on procède plus directement

$$\left| \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} \right| \leq \left| \frac{x^2}{\sin(x)} \right| = \frac{|x|}{\left| \frac{\sin(x)}{x} \right|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{|0|}{|1|} = 0.$$

Exercice 2 (20 points)

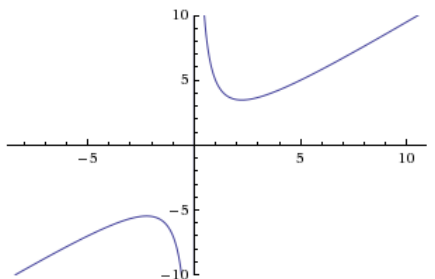
a) Soit $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$. Alors :

- Le domaine de définition de f est \mathbb{R} , f n'a pas de parité/périodicité.
- $f'(x) = 12x^2 - 3$, qui vaut 0 en $x = \pm\frac{1}{2}$.
- f a un maximum local en $x = -\frac{1}{2}$; f a un minimum local en $x = \frac{1}{2}$.
- $f''(x) = 24x$, qui vaut 0 en $x = 0$ et est un point d'inflexion de f .
- f est croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, \infty[$; f est décroissante sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.



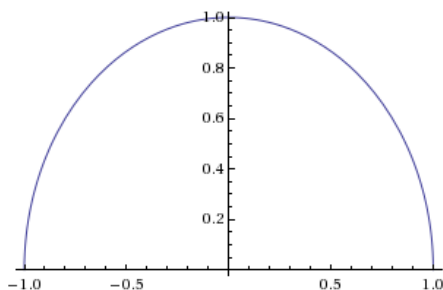
b) Soit $f(x) = \frac{x^2 - x + 5}{x}$. Alors :

- Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} - \{0\}$, f n'a pas de parité/périodicité.
- f a un asymptote vertical en $x = 0$. La fonction $g(x) = x - 1$ est l'asymptote oblique de f lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.
- $f'(x) = 1 - \frac{5}{x^2}$, qui vaut 0 en $x = \pm\sqrt{5}$.
- $f''(x) = \frac{10}{x^3}$, qui ne vaut jamais 0. Notons que $f''(x) < 0$ (f est concave) pour $x < 0$, et $f''(x) > 0$ (f est convexe) pour $x > 0$.
- Donc f a un maximum local en $x = -\sqrt{5}$; f a un minimum local en $x = \sqrt{5}$.
- f est croissante sur $]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, \infty[$; f est décroissante sur $]-\sqrt{5}, 0[\cup]0, \sqrt{5}[$.
- f n'a aucun point d'inflexion.



c) Soit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

- Le domaine de définition de f est $[-1, 1]$, f est une fonction paire.
- $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$, qui vaut 0 en $x = 0$.
- $f''(x) = \frac{-1}{(1 - x^2)^{3/2}}$, qui est strictement négative pour tout x . Ainsi, f est toujours concave.
- f a un maximum global en $x = 0$. De plus, f a deux minima globaux aux extrémités de son domaine de définition, $x = \pm 1$.
- f est croissante sur $] - 1, 0[$; f est décroissante sur $]0, 1[$.
- f n'a aucun point d'inflexion.



d) Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$.

- Le domaine de définition de f est tout \mathbb{R} .
- f a une asymptote oblique en $y = x$. En effet,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2}}}{x} = 1$$

En posant le changement de variables $u = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2}}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2}} - 1 \right) = \lim_{u \rightarrow 1} \sqrt{\frac{3}{u^3 - 1}} (u - 1) = \lim_{u \rightarrow 1} \sqrt{\frac{3(u - 1)^2}{(u - 1)(u^2 + u + 1)}} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \sqrt{\frac{3(u - 1)}{u^2 + u + 1}} = 0 \end{aligned}$$

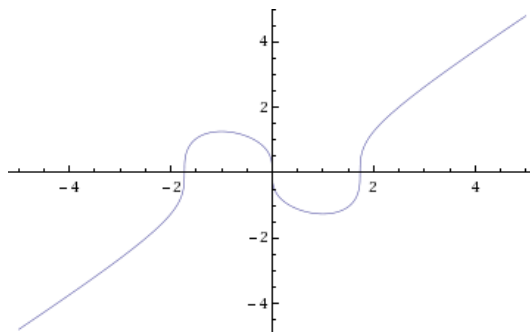
- $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^3 - 3x)^{2/3}}$, qui n'est pas définie quand $x^3 - 3x = 0$, c'est-à-dire $x = 0, \pm\sqrt{3}$.
Notons que $f'(x) = 0$ quand $x = \pm 1$. f est croissante sur $] - \infty, -1[\cup]1, \infty[$ et décroissante ailleurs.
- On a

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^3 - 3x)^{5/3}}$$

Le numérateur est toujours strictement négatif. Ainsi,

$$f''(x) = \begin{cases} < 0 & \text{si } x < -\sqrt{3} \text{ ou } 0 < x < \sqrt{3}; \\ > 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Donc f a un maximum local au point $x = -1$ et un minimum local au point $x = 1$.
- La fonction f est impaire.



Exercice 3 (10 points)

En suivant la configuration de la figure, on obtient une boîte de hauteur h , de profondeur $c - 2h$, et de largeur $c - 2h$. Le volume d'une telle boîte est

$$f(h) = h(c - 2h)^2, \quad \text{où } h \in \left[0, \frac{c}{2}\right].$$

On voit facilement que f n'admet pas le maximum aux extrémités de son domaine de définition. Par exemple, $f(0) = f\left(\frac{c}{2}\right) = 0 < f\left(\frac{c}{6}\right) = \frac{2c^3}{27}$. Ainsi, f doit admettre un maximum à l'intérieur de son domaine.

Par la théorème sur la dérivation de fonctions composées, on a

$$f'(h) = (c - 2h)^2 + h \cdot 2 \cdot (-2)(c - 2h) = (c - 2h)(c - 6h)$$

qui vaut 0 quand $h = \frac{c}{2}$ ou $h = \frac{c}{6}$.

On a déjà vu que f n'admet pas de maximum en $h = \frac{c}{2}$.

On montre que f admet un maximum au point $h = \frac{c}{6}$. Notons que

$$f''(h) = -2(c - 6h) + (-6)(c - 2h) = 24h - 8c.$$

Donc, $f''\left(\frac{c}{6}\right) = 24 \cdot \frac{c}{6} - 8c = -4c < 0$. Ainsi, le volume maximal de la boîte est obtenu quand $h = \frac{c}{6}$, et ce volume maximal est donc $f\left(\frac{c}{6}\right) = \frac{2c^3}{27}$.

Exercice 4 (5 points)

La distance entre un point sur la courbe $y = x^2 - 9$ et $(0, 0)$ est

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2 - 9)^2} = \sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}.$$

Soit $f(x) = \sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}$. Comme $f(x)$ est continue et $f(x) \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x)$ admet un minimum global pour un certain $x \in \mathbb{R}$. De plus, comme $f(x) > 0$ pour tout x , la fonction $g(x) = (f(x))^2$ admet ses extrema pour les mêmes valeurs de x que f . En particulier, $g(c)$ est minimal si et seulement si $f(c)$ est minimal. (Il est un peu plus facile de travailler avec g que f .)

On a $g'(x) = 4x^3 - 34x = x(4x^2 - 34)$ qui vaut 0 quand $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$.

On a aussi $g''(x) = 12x^2 - 34$. Alors, $g''(0) < 0$ et $g''\left(\pm\sqrt{\frac{17}{2}}\right) > 0$. Cela montre que $g(x)$ est minimal quand $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$. Ainsi, $f(x)$ réalise son minimum global quand $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$, et ce minimum est

$$f\left(\sqrt{\frac{17}{2}}\right) = \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 - 17\left(\frac{17}{2}\right) + 81} = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Exercice 5 (5 points)

a) **Vrai.** On va montrer que $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Soit $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$. Alors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\sin^5 x \cos x - 6\cos^5 x \sin x + 6\sin x \cos^3 x - 6\sin^3 x \cos x \\ &= (6\sin x \cos x)(\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= (6\sin x \cos x)(\sin^4 x - \cos^4 x + (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x) \\ &= (6\sin x \cos x)((1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) - \cos^4 x) \\ &= (6\sin x \cos x)((1 - \sin^2 x)^2 - \cos^4 x) \\ &= (6\sin x \cos x)(\cos^4 x - \cos^4 x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, $f(x)$ est constante. De plus, $f(x) = 1$ pour tout x , car $f(0) = 1$.

b) **Vrai.** Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \text{si } x > 0.$$

De plus, comme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

on voit par le théorème des deux gendarmes que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

c) **Vrai.** Pour trouver la limite en 0 de $\frac{\cos x - 1}{x}$, on peut utiliser la règle de l'Hôpital comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

On procède donc au calcul :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = 0.$$

d) **Faux.** La fonction $f(x) = x$ est concave et convexe, mais n'est pas constante. (En fait, on peut montrer que toute fonction f réelle continue qui est concave et convexe sur tout \mathbb{R} est de la forme $f(x) = ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.)

Exercice 6 (5 points)

Supposons que $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions convexes. Alors, si $x, y \in [a, b]$ et $0 \leq t \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} (f + g)(tx + (1 - t)y) &= f(tx + (1 - t)y) + g(tx + (1 - t)y) \\ &\leq tf(x) + (1 - t)f(y) + tg(x) + (1 - t)g(y) \\ &= t[(f + g)(x)] + (1 - t)[(f + g)(y)]. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $f + g$ est aussi convexe.

Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions convexes, il n'est pas toujours vrai que $f \cdot g$ est aussi convexe. Par exemple, soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Alors, f et g sont convexes (sur tout \mathbb{R}), mais $f \cdot g = x^3$, qui n'est pas convexe : pour voir cela, prenons $t = \frac{1}{2}$, $x < 0$ et $y = 0$. Alors,

$$\begin{aligned} (f \cdot g)\left(\frac{x}{2} + \frac{0}{2}\right) &= (f \cdot g)\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^3}{8} > \frac{x^3}{2} \quad (\text{car } x < 0) \\ &= \frac{1}{2}(f \cdot g)(x) + \frac{1}{2}(f \cdot g)(0). \end{aligned}$$

Exercice 7 (5 points)

Par symétrie, la parabole doit passer aussi par $(-3, 0)$. Ainsi, la parabole est de la forme

$$y = k(x - 3)(x + 3), \quad \text{pour un certain } k \in \mathbb{R}.$$

Il est facile de trouver k en substituant $x = 0$ dans l'équation ci-dessus. On trouve que l'équation de la parabole est $y = -\frac{4}{9}(x - 3)(x + 3)$.

Si on dessine un rectangle "posé" sur l'axe horizontal, les sommets du rectangle sont alors (par symétrie)

$$(x, 0), (-x, 0), (x, f(x)) \text{ et } (-x, f(-x)), \quad \text{pour un certain } x \in]0, 3[.$$

L'aire d'un tel rectangle est

$$A(x) = 2x \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) (x - 3)(x + 3) = 8x - \frac{8}{9}x^3.$$

On a

$$A'(x) = 8 - \frac{8}{3}x^2,$$

qui a une racine dans $]0, 3[$, à savoir $x = \sqrt{3}$.

Par ailleurs, $A(x)$ admet un maximum local en $x = \sqrt{3}$, car

$$A''(x) = -\frac{16}{3}x < 0 \quad \text{pour tout } x \in]0, 3[.$$

Ainsi, l'aire maximale du rectangle inscrit est

$$A(\sqrt{3}) = 8(\sqrt{3}) - \frac{8}{9}(\sqrt{3})^3 = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$