Annonce : Examen blanc ce lundi 14 novembre (lire l'email) à 10^h15

Def : une *fonction élémentaire* est une fonction $f : D(f) \to \mathbb{R}$ qui est construite à partir des fonctions polynômes, racines n-ièmes, exponentielle, logarithme, sinus et cosinus et de leurs réciproques et d'un nombre *fini* d'opérations $+, -, \cdot, /, \circ$.

produit division composition

Thm. les fonctions élémentaires sont toutes continues sur leur domaine de définition.

Exemples.

- $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \exp\left(\cos\left(\mathrm{Log}\left(\sqrt{\mathrm{ch}(x)}\right)\right)\right) = \exp\left(\cos\left(\mathrm{Log}\left(\sqrt{\mathrm{ch}(0)}\right)\right)\right) = e$
- $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

  f est continue en x_0, $\forall x_0 \in D(f)$

On a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ donc la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue en tout $x \in \mathbb{R}$.

Def (Prolongement par continuité). Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $D =]a, b[\setminus \{x_0\}$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f, et g est continue en x_0.

Définition équivalente de la continuité "avec ε et δ"

Thm: Soit $f: D(f) \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D(f)$ tel que $\exists \delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset D(f)$. On a que f est continue en x_0 ssi

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall x \in D(f), |x - x_0| \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Rmq: il s'agit simplement de la définition de la limite "avec ε et δ" où la limite ℓ est remplacée par $f(x_0)$.

Thm (Composition de fonctions). Soient $f: D(f) \to \mathbb{R}$ et $g: D(g) \to \mathbb{R}$ telles que $\mathrm{Im}(g) \subset D(f)$. On a $f \circ g: D(g) \to \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in D(g)$. Si

- g est continue en x_0, et
- f est continue en $g(x_0)$

Alors $f \circ g$ est continue en x_0.

Contre-exemple:

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Comportement de $f \circ g$ en 0 ?

- On a $-x \leqslant g(x) \leqslant x$, $\forall x \neq 0$ donc par le Thm. des gendarmes on a $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue en 0.
- On a $\lim_{y \to g(0) = 0} f(y) = 1 \neq f(g(0)) = f(0) = 0$ donc f n'est pas continue en $0 = g(0)$.

Donc le Thm ne s'applique pas.

Par ailleurs on a :

- $x_n = \frac{1}{2\pi n}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(0) = 0$
- $\tilde{x}_n = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{x}_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(\tilde{x}_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\right) = 1$

Donc $f \circ g$ n'est pas continue en 0.

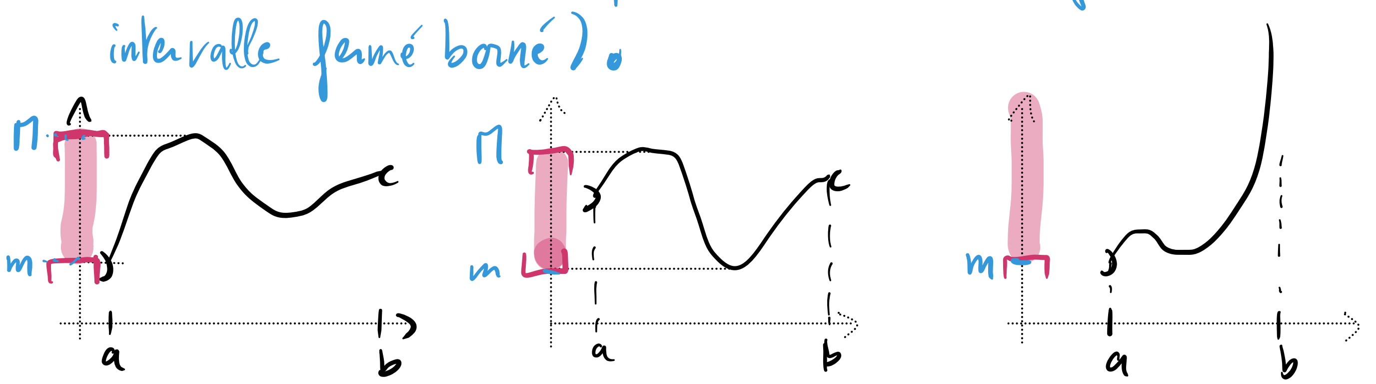
5.7. Propriétés globales des fonctions continues

5.7.1. 1er cas : fonctions continues sur $]a,b[$ (intervalle ouvert borné)

Def : Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur $]a,b[$ si f est continue en tout point $x_0 \in]a,b[$.

Prop : Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue sur $]a,b[$. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle (qui peut être ouvert, fermé ou aucun des deux).

(se déduit des résultats que l'on verra sur les fonctions continues sur un intervalle fermé borné).

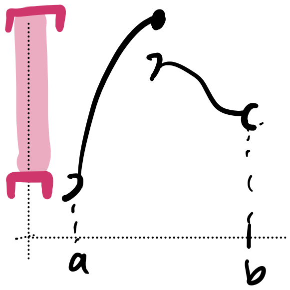


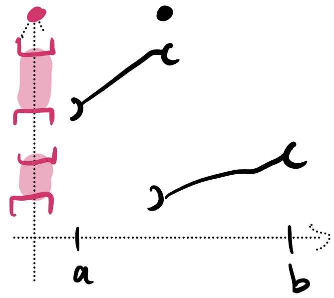
$\mathrm{Im}(f) =]m, M]$ — f continue (sur $]a,b[$)

$\mathrm{Im}(f) = [m, M]$ — f continue

$\mathrm{Im}(f) =]m, +\infty[$ — f continue

Quand f n'est pas continue, tout est possible :





f pas continue
$\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle

f pas continue
$\mathrm{Im}(f)$ n'est pas un intervalle.

(NB : le Thm. reste vrai pour $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$)

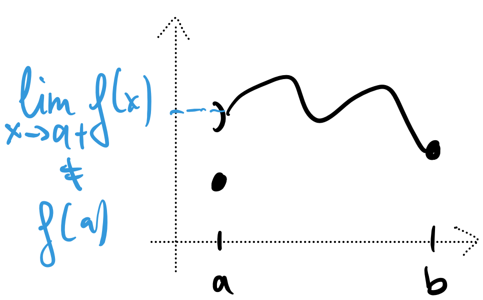
5.7.2. 2ème cas : fonctions continues sur $[a,b]$ (intervalle fermé borné)

Def : On dit que f est :

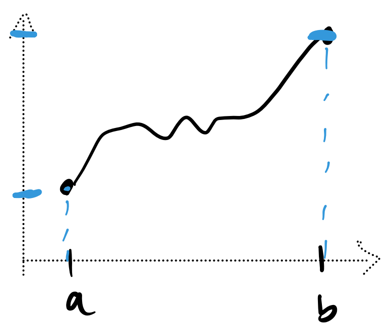
- continue à droite en $x_0 \in [a,b[$ si $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.
- continue à gauche en $x_0 \in]a,b]$ si $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

Def : On dit que f est continue sur $[a,b] \subset D(f)$ ssi

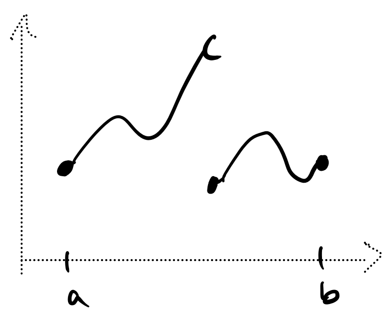
- f est continue sur $]a,b[$
- f est continue à droite en a.
- f est continue à gauche en b.



continue sur $]a,b[$
$]a,b]$
mais pas sur $[a,b]$



continue sur $[a,b]$



pas continue sur $]a,b[$
pas continue sur $[a,b]$

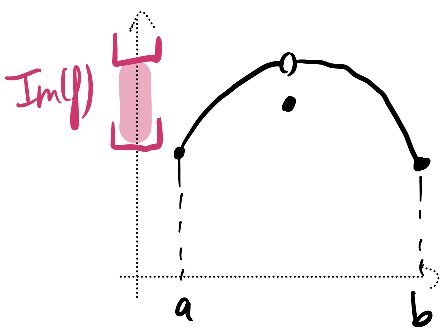
Thm. 1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$.

Alors f admet un minimum et un maximum.

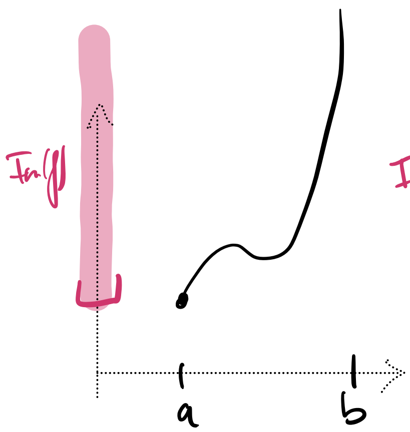
c'est-à-dire que $\exists\, c, C \in [a,b]$ tels que $f(c) \leq f(x) \leq f(C)$ $\forall x \in [a,b]$.

Notation : on note
$$\begin{cases} \min f = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \min \mathrm{Im}(f) & (\text{minimum}) \\ \max f = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \max \mathrm{Im}(f) & (\text{maximum}) \end{cases}$$

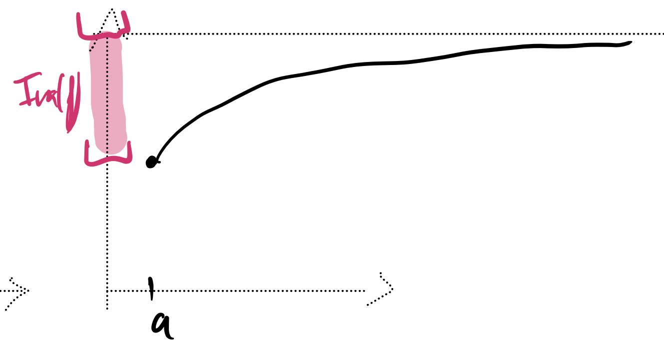
Contre-exemples :



pas continue sur $[a,b]$
pas de maximum



continue sur $[a,b[$ pas fermé
pas de maximum



continue sur $[a,+\infty[$ pas borné
pas de maximum.

Preuve : Soit $M := \sup \{ f(x) \,;\, x \in [a,b] \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

- Il existe une suite (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a,b]$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = M$ (propriétés du supremum).
- Par Bolzano-Weierstrass (x_n) admet une sous-suite $(\tilde{x}_n)$ qui converge donc $\exists\, c \in [a,b]$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \tilde{x}_n = c$.
- On a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\tilde{x}_n) = \begin{cases} M & \text{car } (f(\tilde{x}_n)) \text{ est une sous-suite de } (f(x_n)) \\ f(c) & \text{par continuité de } f. \end{cases}$

- Donc $\exists\, c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M < +\infty$

  Donc M est un maximum.

  (la démonstration est analogue pour le minimum). $\blacksquare$

fin cours 10/11
