1

Enseignant: Philippe Michel
Examen: Algèbre Linéaire Avancée, MATH-110
Date: Le 25 Janvier 2022, 16h15-19h15
Durée: 3 heures

John Frusciante

SCIPER : **000000** Signature :

Attendez le début de l'examen avant de tourner la page.

Ce document est imprimé recto-verso, il contient 33 pages.

Ne pas dégrafer.

- Aucun document n'est autorisé.
- Une calculette simple (sans display graphique) est autorisée.
- Pour les questions à choix multiples:
  - entourez la bonne réponse (sans justification) et utilisez un stylo à encre noire ou bleue foncée; en cas d'erreur effacez proprement avec du correcteur blanc.
  - Une réponse incorrecte compte 0 mais n'entraine pas de point négatif.
- Pour les questions ouvertes:
  - Répondre dans l'espace dédié.
  - Vous pouvez utiliser un crayon à papier à condition d'écrire lisiblement;
  - Si vous utilisez des résultats du cours, citez-les explicitement.
  - Sauf mention explicite du contraire on a le droit d'utiliser un résultat d'un autre exercice ou d'une question précédente du même exercice pour répondre à une question même si on ne l'a pas démontré.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- L'examen est LONG mais il n'est pas nécessaire de le faire correctement intégralement pour obtenir la note maximale.

Formulaire concernant les déterminants

Soit K un corps de caractéristique 2, $d \geqslant 1$, V un K-EV de dimension d et $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V. On rappelle que l'espace vectoriel $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$ des formes multilinéaires alternées en d variables est de dimension 1 (ainsi toute forme multilinéaire alternée est proportioelle a toute autre forme multilinéaire alternée non-nulle). On note $\det_{\mathcal{B}}$ l'unique forme multilinéaire alternée telle que

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d) = 1.$$

Soit $(v_1, \cdots, v_d) \in V^d$ et $v_i = \sum_{j=1}^{d} x_{ij}\mathbf{e}_j$. On a alors

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) x_{1\sigma(1)}.\cdots.x_{d\sigma(d)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)1}.\cdots.x_{\sigma(d)d}$$

Pour $\varphi : V \mapsto V$ une application lineaire, on définit son déterminant $\det(\varphi) \in K$ comme l'unique scalaire vérifiant l'une des égalités équivalentes suivantes:

$$\det_{\mathscr{B}}(\varphi(\mathbf{e}_1), \cdots, \varphi(\mathbf{e}_d)) = \det(\varphi)\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d) = \det(\varphi).$$

$$\forall (v_1, \cdots, v_d) \in V^d,\ \det_{\mathcal{B}}(\varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_d)) = \det(\varphi)\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_d)$$

et si

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (m_{ij})_{i,j \leqslant d} = M$$

est la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$, alors

$$\det(\varphi) = \det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) m_{1\sigma(1)}.\cdots.m_{d\sigma(d)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) m_{\sigma(1)1}.\cdots.m_{\sigma(d)d}.$$

On a par ailleurs pour $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ et $M, N \in M_d(K)$ et $\lambda \in K$

$$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi)\det(\psi),\ \det(M.N) = \det(M)\det(N)$$

$$\det(\lambda\varphi) = \lambda^d \det(\varphi),\ \det(\lambda.M) = \lambda^d \det(M)$$

$$\det(\mathrm{Id}_V) = 1 = \det(\mathrm{Id}_d)$$

Par ailleurs si $M \in M_d(K)$ se décompose en blocs de matrices carrées

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & * \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix} \text{ ou bien } M = \begin{pmatrix} M_1 & \mathbf{0} \\ & M_2 \end{pmatrix},\ M_1 \in M_{d_1}(K),\ M_2 \in M_{d_2}(K),\ d = d_1 + d_2,$$

on a

$$\det(M) = \det(M_1)\det(M_2).$$

Exercice 1 (Questions de cours et QCM)**.** .

1. Enoncer deux propriétés de l'application "transposition" sur l'espace des matrices.

2. Soit G un groupe, H un groupe commutatif et $\varphi : G \mapsto H$ un morphisme de groupes alors l'image $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(G)$ est un sous-groupe de H invariant par conjugaison.

   Vrai Faux

3. Le produit de deux corps est un anneau intègre.

   Vrai Faux

4. Une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ est surjective si $m \geqslant n$.

   Vrai Faux

5. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et M vérifiant ${}^tM.B.M = B$; alors M est inversible.

   Vrai Faux

6. Soit K un corps et $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(K)$ alors C est inversible quelque soit la caractéristique de K.

   Vrai Faux

Exercice 2. Soit K un corps et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 8 & 0 & -16 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(K).$$

1. Déterminer la valeur de $\text{rang}(A)$ en fonction de la caractéristique de K.
2. On suppose que $\text{car}(K) = 0$. Donner une base de $\ker(A)$: on voit A comme la matrice dans les bases canoniques d'une application linéaire de K^5 vers K^4 et on écrira les vecteurs de la base du noyau sous forme de vecteurs lignes.

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 2 (répondre à l'intérieur de la boite)

Exercice 3. Soit (G, e_G) un groupe noté multiplicativement. Pour $g, h \in G$ des éléments, le commutateur de g et h est le produit

$$[g, h] := g.h.g^{-1}.h^{-1}.$$

Le sous-groupe dérivé de G, noté $D(G)$ ou $[G, G]$ est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs:

$$D(G) = [G, G] = \langle [g, h],\ g, h \in G \rangle \subset G.$$

1. Soit $\varphi : G \mapsto G'$ un morphisme de groupes, montrer que

$$\varphi([G, G]) \subset [G', G'].$$

2. Montrer que $[G, G]$ est invariant par conjugaison:

$$\forall g \in G,\ \mathrm{Ad}(g)([G, G]) = g.[G, G].g^{-1} = [G, G].$$

3. Un groupe G est dit parfait si il est égal à son groupe dérivé:

$$G = [G, G].$$

   Soit (G, e_G) un groupe parfait et (C, e_C) un groupe commutatif (toujours noté multiplicativement), montrer que le seul morphisme de groupes $\varphi : G \mapsto C$ est le morphisme trivial.

4. Montrer que pour $n \geqslant 2$ le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ n'est pas parfait.

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 3 (répondre à l'intérieur de la boite)

Exercice 4. Soit K un corps et

$$\mathrm{SL}_3(K) = \{M \in \mathrm{GL}_3(K),\ \det M = 1\} \subset \mathrm{GL}_3(K)$$

le groupe special lineaire des matrices 3×3 de determinant 1. On rappelle que comme

$$\det : \mathrm{GL}_3(K) \mapsto K^\times$$

est un morphisme de groupes $SL_3(K)$ est un sous-groupe distingue (invariant par conjugaison). On va étudier le structure de ce groupe.
Pour cela on a recours aux matrices de transformations élémentiares suivantes: pour $i \neq j \in \{1, \cdots 3\}$ et $\mu \in K^\times$, on pose

$$C_{ij,\mu} = \mathrm{Id}_3 + \mu.E_{ij} \tag{4.1}$$

où $E_{i'j'},\ i', j' \in \{1, \cdots, 3\}$ désignent les matrices élémentaires et Id_3 est la matrice identité.

1. Soit $M \in M_3(K)$ une matrice. Rappelez (sans preuve) a quelle opération sur M correspond la multiplication a gauche $M \mapsto C_{ij,\mu}.M$?

2. Montrer que $\det(C_{ij,\mu}) = 1$ de sorte que les $C_{ij,\mu}$ appartiennent a $\mathrm{SL}_3(K)$. On va montrer que quand $i \neq j$ parcourent $\{1, \cdots, 3\}$ et μ parcourt $K^\times$ les matrices $C_{ij,\mu}$ engendrent $\mathrm{SL}_3(K)$.

3. Soit
$$M = (m_{ij})_{i,j\leqslant 3} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3(K)$$
une matrice de déterminant 1: on veut donc montrer que M peut s'écrire comme un produit de matrices (4.1). Montrer que quitte à remplacer M par sa multipliée à gauche par une (des) matrice(s) $C_{ij,\mu}$ convenable, on peut supposer succéssivement que
   (a) $m_{21} \neq 0$,
   (b) puis que $m_{11} = 1$,
   (c) et enfin que M est une matrice par blocs
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$
   avec $m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32} = 1$

4. Ensuite montrer qu'on peut se ramener au cas où M est de la forme:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 1 & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Et finalement, montrer que cette dernière matrice est un produit de matrices de la forme (4.1).
Ainsi vous avez montré que $\mathrm{SL}_d(K)$ est engendré par les matrices de la forme (4.1).

6. Soient $i, j, k \in \{1, \cdots, 3\}$ tous distincts et $\mu \in K^\times$. Montrer l'égalité

$$[C_{ik,\mu}, C_{kj,1}] = C_{ij,\mu}$$

(ici pour A et B deux matrices inversibles on a noté $[A, B] := A.B.A^{-1}.B^{-1}$ leur <u>commutateur</u>; cf Exercice 3). Pour effectuer ce calcul on pourra par exemple considérer les endomorphismes

$$\mathcal{C}_{ij,\mu} : K^3 \mapsto K^3$$

dont les matrices dans la base canonique de K^3 sont les matrices $C_{ij,\mu}$ et regarder comment les $\mathcal{C}_{ij,\mu}$ transforment les vecteurs de cette base $\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2^0 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3^0 = (0, 0, 1)$.

7. En déduire que le groupe $\mathrm{SL}_3(K)$ est <u>parfait</u>: c'est a dire (cf. Exercice 3) qu'il est engendré par les commutateurs de ses éléments, ou en d'autres termes

$$\mathrm{SL}_3(K) = [\mathrm{SL}_3(K), \mathrm{SL}_3(K)] = \langle [A, B],\ A, B \in \mathrm{SL}_3(K)\rangle.$$

8. Soit $\rho : \mathrm{SL}_3(K) \mapsto \mathrm{GL}(V)$ un morphisme non-trivial (c'est à dire différent du morphisme constant $\underline{\mathrm{Id}}_V$) de $\mathrm{SL}_3(K)$ dans le groupe des automorphismes linéaires d'un K-espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'alors $\dim_K(V) > 1$. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser l'hypothèse de dimension 1 pour construire un morphisme de $\mathrm{SL}_3(K)$ vers $K^\times$ et on pourra utiliser l'Exercice 3.

Remarque. Par la même méthode on peut montrer que pour $d \geqslant 3$, $\mathrm{SL}_d(K)$ est engendré par les matrices

$$C_{ij,\mu} = \mathrm{Id}_d + \mu.E_{ij},\ i \neq j \in \{1, \cdots, d\},\ \mu \in K^\times$$

et que ce groupe est parfait. Si $d = 2$ le groupe $\mathrm{SL}_2(K)$ est encore parfait sauf si $K = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$.

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 4 (répondre à l'intérieur de la boite)

Exercice 5. [Quaternions de Hamilton] Soit $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}.i,\ i^2 = -1$ le corps des nombres complexes et $M_2(\mathbb{C})$ l'espace des matrices 2×2 a coefficients dans $\mathbb{C}$; on note $\mathbf{0}$ la matrice nulle et Id la matrice identité. On considère dans $M_2(\mathbb{C})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}.\mathrm{Id} + \mathbb{R}.I + \mathbb{R}.J + \mathbb{R}.K$$

avec

$$\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est l'espace des quaternions de Hamilton et un élément de cet ensemble

$$Z = t\mathrm{Id} + xI + yJ + zK,\ x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

est appelé un quaternion. Le sous-espace $\mathbb{R}.\mathrm{Id}$ est appelle espace des quaternions scalaires.
Si Z est un quaternion (donc une matrice) on note $\mathrm{tr}(Z)$ sa trace et $\det(Z)$ son déterminant:

$$Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \mathrm{tr}(Z) = a + d,\ \det(Z) = ad - bc.$$

1. Montrer que $\{\mathrm{Id}, I, J, K\}$ forme une base du $\mathbb{R}$-EV $\mathbb{H}$
2. Calculer
$$I^2,\ J^2,\ K^2,\ I.J,\ J.I,\ I.K,\ K.I,\ J.K,\ K.J.$$
3. En déduire que $\mathbb{H}$ est stable par produit dans $M_2(\mathbb{C})$; c'est donc une $\mathbb{R}$-algèbre. Montrer que $\mathbb{H}$ n'est pas commutative.
4. On note $\mathbb{H}^\times$ le groupe multiplicatif des quaternions inversibles. Soit $Z = t\mathrm{Id} + xI + yJ + zK$ un quaternion. Calculer $\det(Z)$ en fonction de t, x, y, z et montrer que $Z \in \mathbb{H}$ est inversible (comme matrice) si et seulement si $Z \neq \mathbf{0}$: on a donc $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} - \{\mathbf{0}\}$

   Remarque. Bien que tout élément non-nul soit inversible, $\mathbb{H}$ n'est PAS commutative et ce n'est donc pas un corps. On dit que $\mathbb{H}$ est une algèbre à divisions.

5. Les quaternions sont munis d'une "conjugaison complexe"
$$Z \mapsto \overline{Z} = t\mathrm{Id} - xI - yJ - zK$$
qui est $\mathbb{R}$-lineaire (admis). Montrer que
$$\ker(\mathrm{tr}) = \{Z \in \mathbb{H},\ Z + \overline{Z} = \mathbf{0}\} = \mathbb{R}.I + \mathbb{R}.J + \mathbb{R}.K.$$
Le sous-espace
$$\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}.I + \mathbb{R}.J + \mathbb{R}.K$$
est appelé espace des quaternions imaginaires.
6. Montrer que pour tout quaternion Z on a
$$Z.\overline{Z} = \det(Z)\mathrm{Id}$$
et que pour Z' un autre quaternion, on a
$$\overline{Z.Z'} = \overline{Z'}.\overline{Z}.$$

7. Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{H}$ il existe $b = b(Z), c = c(Z) \in \mathbb{R}$ tels que
$$Z^2 + b.Z + c\mathrm{Id} = \mathbf{0}$$
(on pourra par exemple exprimer $\overline{Z}$ comme combinaison linéaire a coefficients réels de Id et Z).

8. En déduire que le $\mathbb{R}$-EV
$$\mathbb{R}.\mathrm{Id} + \mathbb{R}.Z \subset \mathbb{H}$$
est un sous-anneau commutatif de $\mathbb{H}$ qu'on notera $\mathbb{R}[Z]$. Montrer que tout élément non-nul de $\mathbb{R}[Z]$ a son inverse contenu dans $\mathbb{R}[Z]$. Ainsi $\mathbb{R}[Z]$ est un corps (commutatif) de $\mathbb{H}$.

9. Que vaut $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[Z])$ si Z est un quaternion scalaire ? si Z n'est pas un quaternion scalaire?

10. Comme $\mathbb{R}[Z]$ est un corps contenu dans $\mathbb{H}$, ce dernier est un $\mathbb{R}[Z]$-espace vectoriel (la multiplication "par les scalaires" étant donnée par la multiplication dans $\mathbb{H}$).
    (a) Que vaut $\dim_{\mathbb{R}[Z]}(\mathbb{H})$ si Z est un quaternion scalaire ?
    (b) Montrer que si Z n'est pas un quaternion scalaire, il existe $I' \in \{I, J, K\}$ tel que $\{\mathrm{Id}, I'\}$ forme une $\mathbb{R}[Z]$-base de $\mathbb{H}$.

11. Le <u>centralisateur</u> de Z dans $\mathbb{H}$ est defini comme le sous-ensemble des éléments de $\mathbb{H}$ qui commutent avec Z:
$$\mathrm{Cent}(Z) := \{C \in \mathbb{H},\ C.Z = Z.C\}.$$
Montrer que $\mathrm{Cent}(Z)$ est un sous-anneau (non-nul) de $\mathbb{H}$ et que c'est également un $\mathbb{R}[Z]$-EV.

12. Montrer que si Z n'est pas un quaternion scalaire on a
$$\mathrm{Cent}(Z) = \mathbb{R}[Z].$$
Pour cela on pourra (si on veut) montrer que, pour $C \in \mathrm{Cent}(Z)$ un élément non-nul du centralisateur le $\mathbb{R}[Z]$-EV
$$\mathbb{R}[Z] + \mathbb{R}[Z].C \subset \mathbb{H}$$
est un anneau commutatif; on en déduira que $\mathbb{R}[Z] + \mathbb{R}[Z].C = \mathbb{R}[Z]$.

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)

Réponses aux questions de l'Exercice 5 (répondre à l'intérieur de la boite)