Corrigé 9 : problème à deux corps, centre de masse

1. **Centre de masse d'une plaque triangulaire**

   Par définition, le centre de masse G d'un objet formé de N points matériels de masse m_i et de position $\vec{r}_i$ est

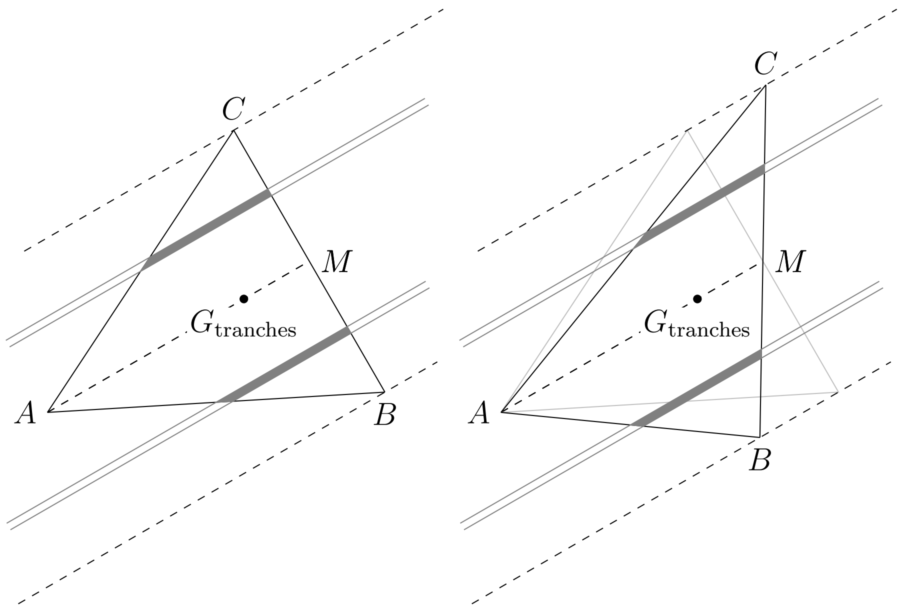
   $$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\big(m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_N\vec{r}_N\big) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\,,$$

   où $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ (masse de l'objet).
   Pour un objet « continu », la définition est similaire :

   $$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_{\text{objet}} dm\,\vec{r}\,,$$

   où $m = \int_{\text{objet}} dm$ (masse de l'objet).
   Le centre de masse est donc la moyenne des positions, pondérée par les masses.

   - Triangle isocèle. Il est clair par symétrie que le centre de masse se trouve sur la médiane AM, qui est aussi la bissectrice de l'angle en A : tout morceau de la plaque a son symétrique par rapport à AM.
   - Triangle quelconque. On peut considérer deux fines tranches du triangle isocèle, parallèles à AM et symétriques par rapport à AM : leur centre de masse G_{tranches} se trouve sur AM. En déformant le triangle comme indiqué, la taille des tranches ne change pas (théorème de Thalès), ni leur distance à AM : le centre de masse reste sur AM (en fait, il ne se déplace pas).



   En considérant le triangle quelconque formé de toutes ces tranches, son centre de masse se trouve donc sur la médiane AM. Cela traduit le fait que le triangle, posé sur une médiane, est en équilibre, ou encore que la médiane AM, lorsque le triangle est suspendu par le sommet A, est verticale.

2. **Effet de recul**

(a) Pour l'objet formé du chariot et du boulet, les forces (poids et soutien du sol) sont verticales : l'objet est isolé horizontalement.

$$F_{\text{horiz}} = 0 \Longrightarrow P_{\text{horiz}} = \text{cte} = 0\,.$$

Dans cette direction, la quantité de mouvement est donc conservée (elle est nulle) et le centre de masse reste immobile. Le boulet roulant vers la gauche, le chariot part à droite.

La vitesse du boulet est mesurée par rapport au chariot : c'est une vitesse relative. Remarquons que le chariot se met lui-même en mouvement et que ce n'est donc pas un référentiel d'inertie !

Choisissons un repère $\hat{e}_x$ horizontal orienté vers la gauche et notons $x = x_2 - x_1$ la position relative (du boulet par rapport au chariot).

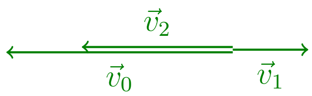
La vitesse relative s'écrit donc $v = v_2 - v_1$. Comme $v_2 > 0$ et $v_1 < 0$ par conservation de la quantité de mouvement, la vitesse relative v est positive.

En particulier, lorsque le boulet quitte le chariot, la vitesse relative s'écrit $v_2 - v_1 = v_0 > 0$ (v_0 : norme) et la vitesse du boulet est

$$v_2 = v_1 + v_0 < v_0\,.$$

La vitesse du boulet mesurée depuis le sol est donc inférieure à celle mesurée depuis le chariot.

Un raisonnement intuitif permet également d'arriver à cette conclusion : comme, par rapport au sol, le boulet part vers la gauche et le chariot vers la droite, il convient de superposer le mouvement de recul du chariot par rapport au sol au mouvement du boulet par rapport au chariot (addition des vitesses selon Galilée).



$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_0$$

La norme $||\vec{v}_2||$ de la vitesse du boulet par rapport au sol est donc plus petite que celle par rapport au chariot : $||\vec{v}_2|| < v_0$.

(b) Par conservation de la quantité de mouvement selon $\hat{e}_x$,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

avec $v_2 = v_1 + v_0$. Ainsi

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1 + m_2 (v_1 + v_0) = 0 \Leftrightarrow v_1 = -\frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} < 0\,.$$

Remarque : vectoriellement,

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_0$$

et donc

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 (\vec{v}_1 + \vec{v}_0) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_1 = -\frac{m_2 \vec{v}_0}{m_1 + m_2}\,.$$