Corrigé Série 09 : Problème à deux corps, centre de masse

Questions conceptuelles

a) Au moment du passage au-dessus de la barre, la position du corps du sauteur est telle que son centre de masse peut être en dehors du volume de son corps. Il est donc possible que son centre de masse soit au niveau ou même en dessous de la barre. On remarquera que si la barre est remplacée par un mur, alors le centre de masse pourrait passer "à travers" le mur.

   Durant le saut, et en négligeant les frottements de l'air, le poids du sauteur est la seule force extérieure. La trajectoire du centre de masse suit un mouvement balistique, qui est donc une parabole. Les videos suivantes illustrent la situation :

   `https://www.youtube.com/watch?v=XBtBdNHBNSI`

   `https://www.youtube.com/watch?v=RaGUW1d0w8g`

b) Non, la quantité de mouvement de la balle n'est pas conservée car le sol applique une force extérieure au système de la balle. On note que les quantités de mouvement avant et après le choc, bien qu'ayant des normes égales, ne sont pas des vecteurs égaux.

c) Dans les deux cas (sol ou matelas), l'œuf subit la même variation de quantité de mouvement Δp durant le choc (en fait $\Delta p = m\sqrt{2gh}$ où m est la masse de l'œuf et h la hauteur de chute). Cette variation de quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force $F(t)$ appliquée par le sol ou le matelas durant un temps Δt. Par la deuxième loi de Newton, l'impulsion est égale à

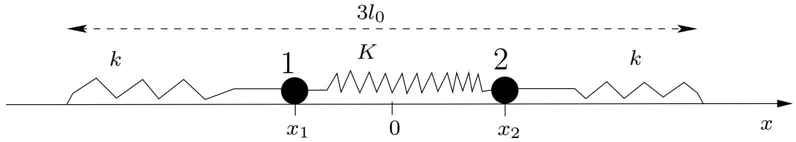
$$\Delta p = \int_0^{\Delta t} F(t)dt,$$

   où on a mis $t = 0$ à l'instant où la force commence à agir.

   En supposant que la force F est constante durant le choc, c'est-à-dire $F(t) = F_0$, on a $\Delta p = F_0 \Delta t$ et la force est inversement proportionnelle à la durée du choc ($F_0 = \frac{\Delta p}{\Delta t}$). Comme la durée du choc sur le matelas est beaucoup plus longue que sur le sol, la force moyenne y est plus faible, et donc l'œuf se cassera moins facilement sur le matelas.

1 Oscillateur couplé

On choisit un repère tel que l'axe x est parallèle au rail, et on place l'origine à mi-distance entre les points fixes des ressorts de constante de rappel k.



Sans le ressort de raideur K, les 2 masses se comportent comme 2 oscillateurs harmoniques indépendants de pulsation $\sqrt{\frac{k}{m}}$. C'est le ressort de raideur K qui introduit le couplage entre les deux masses.

a) Les équations du mouvement pour les points matériels, numérotés 1 et 2, sont

$$m\ddot{x}_1 = -k\left(x_1 - \left(-\frac{l_0}{2}\right)\right) - K\left(x_1 - (x_2 - l_0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x}_1 = -k\left(x_1 + \frac{l_0}{2}\right) + K(x_2 - x_1 - l_0)\,, \tag{1}$$

et

$$m\ddot{x}_2 = -k\left(x_2 - \frac{l_0}{2}\right) - K\left(x_2 - (x_1 + l_0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x}_2 = -k\left(x_2 - \frac{l_0}{2}\right) - K(x_2 - x_1 - l_0)\,. \tag{2}$$

b) Le centre de masse du système est défini par

$$X_{\mathrm{G}} = \frac{mx_1 + mx_2}{m+m} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \ddot{X}_{\mathrm{G}} = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2}\,,$$

et la coordonnée relative entre les points matériels est

$$u = x_2 - x_1 \Rightarrow \ddot{u} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1\,.$$

En calculant la somme des équations (1) et (2), on obtient

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \Rightarrow m\ddot{X}_{\mathrm{G}} = -kX_{\mathrm{G}} \Rightarrow \ddot{X}_{\mathrm{G}} + \frac{k}{m}X_{\mathrm{G}} = 0\,, \tag{3}$$

qui est l'équation du mouvement du centre de masse.
En calculant la différence entre les équations (2) et (1), on obtient

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -k(x_2 - x_1 - l_0) - 2K(x_2 - x_1 - l_0)\,,$$

d'où l'on trouve

$$m\ddot{u} = -(k+2K)(u - l_0) \Rightarrow \ddot{u} + \frac{k+2K}{m}(u - l_0) = 0\,, \tag{4}$$

qui est l'équation du mouvement relatif.

c) On remarque que les deux équations du mouvement (3) et (4) sont des équations d'oscillateurs harmoniques de pulsations $\omega_{\mathrm{G}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pour le centre de masse, et $\omega_u = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$ pour le mouvement relatif.
La solution générale pour l'équation du mouvement du centre de masse est donc

$$X_{\mathrm{G}}(t) = A_{\mathrm{G}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_{\mathrm{G}}\right)\,,$$

et pour le mouvement relatif

$$u(t) = A_u \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t + \phi_u\right) + l_0\,.$$

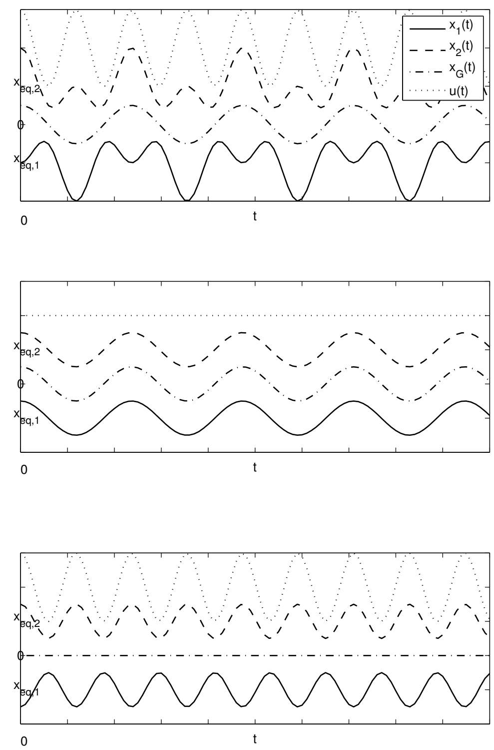
Le mouvement des points matériels, $x_1(t)$ et $x_2(t)$, est alors donné par

$$x_1(t) = X_{\mathrm{G}} - \frac{u}{2} = A_{\mathrm{G}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_{\mathrm{G}}\right) - \frac{1}{2}A_u \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t + \phi_u\right) - \frac{l_0}{2}\,,$$

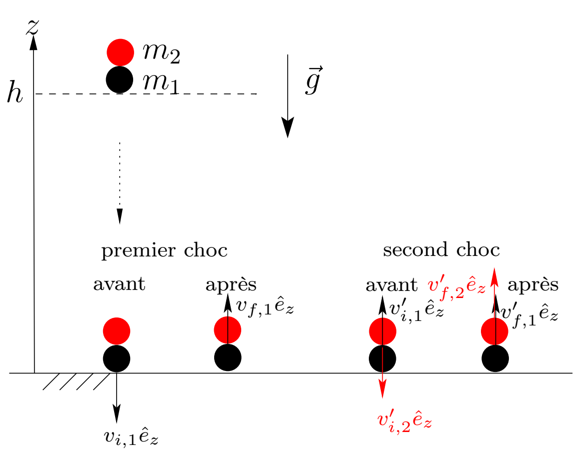
et

$$x_2(t) = X_{\mathrm{G}} + \frac{u}{2} = A_{\mathrm{G}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_{\mathrm{G}}\right) + \frac{1}{2}A_u \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t + \phi_u\right) + \frac{l_0}{2}\,.$$

d) Si la coordonnée relative reste constante, cela veut dire que la distance entre les 2 masses ne change pas au cours du temps. Cette situation correspond à une condition initiale telle que $A_u = 0$, et donc $u(t) = l_0$. Dans ce cas-là, les masses oscillent *en phase* avec une pulsation $\omega_G = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Cette situation est observée si les 2 masses sont écartées de leur position d'équilibre de la même distance et *dans la même direction* avant d'être lâchées.
Le cas particulier où le centre de masse est immobile correspond à une condition initiale telle que $A_G = 0$, et on a alors $X_G(t) = 0$. Dans ce cas-là, les deux masses oscillent en *opposition de phase* à la pulsation $\omega_u = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$. Ce mouvement est observé si les deux masses sont écartées de leur position d'équilibre d'une même distance et *dans des directions opposées* avant d'être lâchées.
La figure ci-contre illustre l'évolution des différentes positions pour un cas général et les 2 cas particuliers.



2 Rebond de deux balles



Attention : Dans cet exercice, la quantité v est la norme du vecteur $\vec{v}$ alors que les quantités telles v_i, v_f sont des composantes selon l'axe z, dirigé vers le haut selon la figure.
Nous considérons d'abord le cas où les deux chocs sont élastiques, puis nous traiterons le cas où le choc entre les deux balles est mou.

2.1 Choc élastique

a) Comme indiqué dans la donnée, on décompose le problème en deux chocs élastiques. Le premier entre la balle m_1 et le sol suivi immédiatement après du deuxième entre les deux balles :

— avant le premier choc, la balle m_1 a une vitesse $v_i = -v$ (on a choisi l'axe $\hat{e}_z$ dirigé vers le haut). Le choc est parfaitement élastique (et la masse de la balle négligeable par rapport à celle de la terre), donc $v_f = -v_i = v$ (v_i et v_f sont les vitesses initiale et finale de la balle en projection sur l'axe $\hat{e}_z$). La vitesse v est donnée par la hauteur h et l'accélération gravitationnelle. Par conservation de l'énergie mécanique dans la chute, on a $\frac{1}{2}m_i v^2 = m_i g h$ $(i = 1, 2)$, et donc

$$v = \sqrt{2gh}$$

— avant le deuxième choc, la balle m_1 a une vitesse $v'_{i,1} = v$ et la balle m_2 une vitesse $v'_{i,2} = -v$. La conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire

$$m_1 v - m_2 v = m_1 v'_{f,1} + m_2 v'_{f,2} \tag{5}$$

et la conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_{f,1} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{f,2} \tag{6}$$

De l'équation (5), on tire

$$v'_{f,1} = \frac{(m_1 - m_2)v - m_2 v'_{f,2}}{m_1} \tag{7}$$

qu'on injecte dans (6) pour trouver

$$(m_2^2 + m_1 m_2)v'^2_{f,2} + 2(m_2^2 - m_1 m_2)v v'_{f,2} + (m_2^2 - 3m_1 m_2)v^2 = 0.$$

Il s'agit d'une équation du deuxième degré dont les solutions sont

$$v'_{f,2} = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v \quad \text{et} \quad v'_{f,2} = -v.$$

C'est la première solution qui nous intéresse (la deuxième correspond au cas où il n'y a pas eu de choc).
En injectant ce résultat dans (7), on trouve

$$v'_{f,1} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}v$$

b) Pour que les deux balles repartent vers le haut, il faut que $v'_{f,1} > 0$ et $v'_{f,2} > 0$. Ce qui donne respectivement les conditions

$$m_1 > 3m_2 \quad \text{et} \quad 3m_1 > m_2$$

Si la première condition est respectée, la deuxième l'est automatiquement. Si on veut que les balles repartent les deux vers le haut, il faut donc que $m_1 > 3m_2$. Dans le cas limite où $m_1 = 3m_2$, on a $v'_{f,1} = 0$, la balle m_1 reste immobile sur le sol.

c) Dans la limite où $m_1 \gg m_2$, on a

$$v'_{f,2} = 3v \quad \text{et} \quad v'_{f,1} = v \tag{8}$$

La hauteur à laquelle remontent les balles est donnée par l'équation du mouvement

$$\ddot{z} = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -gt + v_0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$$

avec les conditions initiales $z_0 = 0$ et v_0 est le résultat obtenu en (8).
La hauteur maximale est atteinte pour $\dot{z}(t_{\max}) = 0$, c'est-à-dire $t_{\max} = \frac{v_0}{g}$ et donc

$$z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Pour la balle m_1, on a $v_0 = v$, donc

$$z_{1,\max} = \frac{v^2}{2g} = h.$$

Pour la balle m_2, la vitesse initiale est $3v$, ce qui nous donne

$$z_{2,\max} = \frac{9v^2}{2g} = 9h.$$

Alternativement, on peut faire usage de la conservation de l'énergie mécanique. Par exemple, pour la balle de masse m_2 :

$$\frac{1}{2}m_2 v'^2_{f,2} = \frac{1}{2}m_2(3v)^2 = m_2 g z_{2,\max},$$

d'où on trouve immédiatement

$$z_{2,\max} = \frac{9v^2}{2g} = 9h.$$

2.2 Choc mou

On considère maintenant le cas où le choc entre les deux balles est mou. Les vitesses finales des deux balles sont donc égales, et nous les notons $v'_{f,1} = v'_{f,2} \equiv v'_f$.

a) Le raisonnement est similaire au cas des chocs élastiques, mais l'énergie mécanique n'est pas conservée au cours du choc mou. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit maintenant

$$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2)v'_f,$$

d'où l'on tire

$$v'_f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh}$$

b) Pour que les balles partent vers le haut, il faut que la vitesse v'_f soit positive, et donc que $m_1 > m_2$. Si $m_1 = m_2$, les balles restent au sol.

c) Si $m_1 \gg m_2$, la vitesse finale $v'_f = v$. Par la conservation de l'énergie mécanique pendant la phase de remontée, on trouve

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = (m_1 + m_2)gz_{\max},$$

et donc

$$z_{\max} = \frac{v^2}{2g} = h.$$

On aurait pu résoudre ce problème en remarquant que, dans le cas du choc mou, les deux balles peuvent être considérées comme soudées entre elles et ainsi elles forment un seul objet de masse $m_1 + m_2$.

3 Plaque percée

La plaque entière peut être considérée comme la combinaison de la plaque percée (de masse M et de centre de masse $\vec{r}_G$) et du disque de rayon R (de masse M_d et de centre de masse $\vec{r}_d$). Alors, son centre de masse est donné par :

$$\vec{r}_{\mathrm{G,c}} = \frac{1}{M + M_{\mathrm{d}}} \left(M\vec{r}_{\mathrm{G}} + M_{\mathrm{d}}\vec{r}_{\mathrm{G,d}} \right) \tag{9}$$

où M est la masse de la plaque percée et $\vec{r}_{\mathrm{G}}$ son centre de masse que l'on cherche. De cette équation, on tire :

$$\vec{r}_{\mathrm{G}} = \frac{(M + M_{\mathrm{d}})\vec{r}_{\mathrm{G,c}} - M_{\mathrm{d}}\vec{r}_{\mathrm{G,d}}}{M} \tag{10}$$

De plus, il n'est pas nécessaire d'intégrer pour trouver le centre de masse d'objets simples comme un carré ou un disque. En effet, dans le repère Oxy indiqué sur la figure, les coordonnées du centre de masse du carré non percé sont

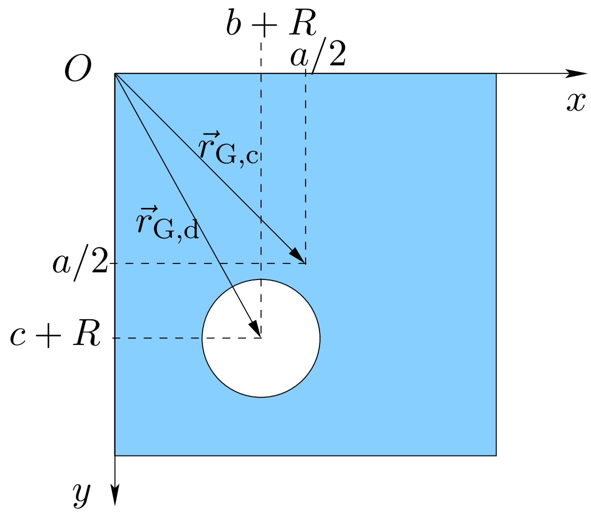
$$\vec{r}_{\mathrm{G,c}} = \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \end{pmatrix},$$

et les coordonnées du centre de masse du disque sont

$$\vec{r}_{\mathrm{G,d}} = \begin{pmatrix} b + R \\ c + R \end{pmatrix}.$$

On peut donc aisément déduire les coordonnées du centre de masse de la plaque percée :

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{G}} = \frac{(M + M_{\mathrm{d}})\frac{a}{2} - M_{\mathrm{d}}(b + R)}{M} &= \frac{a}{2} + \frac{M_{\mathrm{d}}}{M}\left(\frac{a}{2} - b - R\right) \\ &= \frac{a}{2} + \frac{\pi R^2}{a^2 - \pi R^2}\left(\frac{a}{2} - b - R\right) \qquad (11) \\ y_{\mathrm{G}} = \frac{(M + M_{\mathrm{d}})\frac{a}{2} - M_{\mathrm{d}}(c + R)}{M} &= \frac{a}{2} + \frac{M_{\mathrm{d}}}{M}\left(\frac{a}{2} - c - R\right) \\ &= \frac{a}{2} + \frac{\pi R^2}{a^2 - \pi R^2}\left(\frac{a}{2} - c - R\right). \qquad (12) \end{aligned}$$


b + R
a/2
O
x
r_G,c
r_G,d
a/2
c + R
y