Correction série 6 Algèbre linéaire avancée I

12 Novembre 2022

Exercice 1 :

1. Non : $(\sqrt{2}, 1), (2, -\sqrt{2}) \in U(\mathbb{R})$ mais $(2+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ n'est pas dans $U(\mathbb{R})$.
2. $U(\mathbb{Q}) = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x^2 - 2y^2 = 0\} = \{0\}$ car le seul rationel qui satisfait $x^2 - 2y^2 = 0$ est 0 car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. Oui.
4. Non car $(0, \ldots, 0) \notin \{(x_1, \ldots, x_2) \in K^d : x_1 + \ldots + x_d = 6_k\}$.
5. Oui.

Exercice 2 :

1. Soient $\lambda \in K,\ f_1, f_2 \in \mathcal{F}(K, K)^+$, alors on a :

$$(\lambda f_1 + f_2)(x) = \lambda f_1(x) + f_2(x) = \lambda f_1(-x) + f_2(-x) = (\lambda f_1 + f_2)(-x)$$

   Ainsi $\mathcal{F}(K, K)^+$ est bien un SEV de $\mathcal{F}(K, K)$. On utilise ensuite le même raisonnement pour $\mathcal{F}(K, K)^-$.

2. Supposons que car(K)$\neq 2$. Montrons d'abord que $\mathcal{F}(K, K) = \mathcal{F}(K, K)^+ + \mathcal{F}(K, K)^-$ et montrons ensuite la somme directe.
   Soit $f \in \mathcal{F}(K, K)$, on cherche alors $f_1 \in \mathcal{F}(K, K)^+$ et $f_2 \in \mathcal{F}(K, K)^-$ tq $f = f_1 + f_2$. On peut prendre $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. On remarque facilement que $f_1 \in \mathcal{F}(K, K)^+$ et $f_2 \in \mathcal{F}(K, K)^-$. Donc on a bien ce qu'on voulait.
   Soit maintenant $f \in \mathcal{F}(K, K)^+ \cap \mathcal{F}(K, K)^-$. Alors $\forall x \in K$ on a :

$$f(x) = f(-x) = -f(-x)$$

   mais vu que car(K)$\neq 2$, $1 \neq -1$ donc sauf si f est la fonction nulle, $f(-x) \neq -f(-x)$. Ainsi on a bien $f \in \mathcal{F}(K, K)^+ \cap \mathcal{F}(K, K)^- = \{0\}$. Et on a fini.

3. Si car(K)=2, en suivant le même raisonnement qu'avant on a que $\mathcal{F}(K, K)^+ = \mathcal{F}(K, K)^-$, et donc la somme ne peut pas être directe.

Exercice 3 :

1. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est libre, écrivons $a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$. On obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

qui n'a que $a = b = c = 0$ comme solution si car(K)$\neq$2, et donc $\mathcal{F}$ est une famille libre.

2. Puisque $\dim(K^3) = 3$ et que $\mathcal{F}$ est une famille libre de cardinal 3, elle doit être génératrice.

3. Pour obtenir une combinaison linéaire $a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = (x,y,z)$, on résout le système
$$\begin{cases} a+b=x \\ a+c=y \\ b+c=z \end{cases}$$
et on obtient $b = x - a$, $c = y - a$. Ainsi :
$$\begin{cases} a = \frac{x+y-z}{2} \\ b = x - \frac{x+y-z}{2} \\ c = y - \frac{x+y-z}{2} \end{cases}$$
Si $\mathrm{car}(K) \neq 2$, $\mathcal{F}$ est bien une famille génératrice.

4. Si $\mathrm{car}(k) = 2$, alors $a = b = c = 1$ est aussi une solution du système d'équations de la question (1), et donc on a une combinaison linéaire $(1,1,0) + (1,0,1) + (0,1,1) = (0,0,0)$ avec des coefficients non nuls, ce qui fait de $\mathcal{F}$ une famille non libre. Donc $\mathcal{F}$ ne peut pas être génératrice puisqu'elle est de dimension 3.

Exercice 4 :

1. Montrons que π_X est une application linéaire (le raisonnement sera similaire pour π_Y). Soient $v_1, v_2 \in V$ et $\lambda \in K$ quelconques. Par hypothèse, il existe d'uniques $x_1, x_2 \in X$ et $y_1, y_2 \in Y$ tels que $v_1 = x_1 + y_1$ et $v_2 = x_2 + y_2$. Alors on a :
$$\pi_X(\lambda \cdot v_1 + v_2) = \pi_X(\lambda(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \pi_X((\lambda \cdot x_1 + x_2) + (\lambda \cdot y_1 + y_2)) = \lambda \cdot x_1 + x_2$$
Or $\lambda \cdot x_1 + x_2 = \lambda \cdot \pi_X(v_1) + \pi_X(v_2)$ donc, comme voulu, π_X est linéaire. (Ici on a utilisé le fait que X est un SEV donc $\lambda \cdot x_1 + x_2 \in X$)

2. Soient $(x,y) \in \ker(\varphi)$, montrons que $(x,y) = (0,0)$ ce qui prouvera que φ est injective. Si $\varphi(x,y) = O_V$, on a $x + y = O_V$, ce qui signifie que $x = -y \in X \cap Y$, i.e., $x = y = 0$. L'application φ est surjective par sa définition et donc φ est un isomorphisme.

Exercice 6 :

1. Soient $q \in \mathbb{Q}, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Q}^2$. Alors on a :
$$\begin{aligned} \varphi(q(x_1,x_2) + (x_2,y_2)) &= \varphi(qx_1 + x_2, qy_1 + y_2) && (1) \\ &= (2 \cdot (qx_1 + x_2) + qy_1 + y_2, qx_1 + x_2 + 2 \cdot (qy_1 + y_2)) && (2) \\ &= q \cdot (2x_1 + y_1, x_1 + 2y_1) + (2x_2 + y_2, x_2 + 2y_2) && (3) \\ &= q \cdot \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2) && (4) \end{aligned}$$
comme voulu.

2. On résoudra cette question en même temps que l'exercice 7. Le cas où K=$\mathbb{Q}$ fait partie du cas car(K)$\neq$3, étant donné que $\mathrm{car}(\mathbb{Q}) = 0$.

Exercice 7 :

1. Si $\text{car}(K) \neq 3$, alors $2x+y=0$ et $x+2y=0 \Leftrightarrow x=y=0$ et donc $\ker(\varphi)=\{0\}$. Dans ce cas φ est injective et puisque c'est une application $K^2 \to K^2$ elle est aussi surjective (car l'ensemble de départ a la même dimension que l'ensemble d'arrivé). On peut aussi trouver une préimage pour chaque (X,Y) en résolvant le système

$$\begin{cases} 2x+y=X \\ x+2y=Y \end{cases}$$

(cf exercice 8.2. : c'est le même raisonnement)

2. Lorsque $\text{car}(K)=3$, les équations $2x+y=0$ et $x+2y=0$ se réécrivent

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=Y \end{cases}$$

car $2_K = -1_K$ si car(K) = 3. Donc dans ce cas là, $\ker(\varphi) = \{(x,x) | x \in K\}$, qui est généré par le vecteur $(1_K, 1_K)$.

Pour calculer $\text{Im}(\varphi)$, notons que l'application s'écrit $(x,y) \mapsto (-x+y, x-y = -(-x+y))$. Alors on a finalement $\text{Im}(\varphi) = \{(X,-X) | X \in K\}$ qui est généré par le vecteur $(1_K, -1_K)$.

Exercice 8 :

1. Si (x,y)$\in \ker(\varphi)$, alors $y=-2x$ et $y=-x$, la seule solution est donc $x=y=0$.

2. Soient $(X,Y) \in K^2$, trouvons $(x,y) \in K^2$ tq $\varphi(x,y)=(X,Y)$. Il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+y=X \\ x+y=Y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+(Y-x)=X \\ y=Y-x \end{cases} \iff \begin{cases} x=X-Y \\ y=2Y-X \end{cases}$$

On obtient donc comme solution $x=X-Y$ et $y=2Y-X$. Ainsi φ est surjective, autrement dit $\text{Im}(\varphi)=K^2$.

Exercice 9 :

Pour simplifier les notations ici, on notera a pour a_K.

1. Il faut ici vérifier les conditions de K-EV, autrement dit de K-module, à savoir $\forall k,k' \in K$, $A,B \in M_2(K)$
   — $(k.k')A = k(k'A)$
   — $(k+k')A = kA + k'A$, $k(A+B) = kA + kB$
   — $1.B = B$ avec 1 l'identité du corps K
   Toutes ces conditions découlent directement des propriétés des matrices et sont facilement vérifiées.

2. Il est facile de vérifier que $\mathcal{B} = \{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ est une famille génératrice car $\forall a,b,c,d \in K$, on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot E_{11} + b \cdot E_{12} + c \cdot E_{21} + d \cdot E_{22}$$

Pour montrer que $\dim_K M_2(K) = 4$, on peut considérer l'application $\varphi : (a,b,c,d) \in K^4 \mapsto a \cdot E_{11} + b \cdot E_{12} + c \cdot E_{21} + d \cdot E_{22} \in M_2(K)$.
φ est surjective (on peut générer $\mathcal{B}$ en prenant comme antécédants la base canonique de K^4) et injective car $\varphi(a,b,c,d) = O_{M_2(K)}$ si et seulement si $a = b = c = d = 0$. De plus, on peut facilement vérifier que φ est un homomorphisme. Ainsi on a bien ce qu'on voulait.

3. On sait que $Id_2 \in K.Id_2$ (prendre $\lambda = 1$), et vérifions maintenant que $\forall A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K.Id_2$ on a $AB - C \in K.Id_2$:
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab-c & 0 \\ 0 & ab-c \end{pmatrix} \in K.Id_2$$
Ainsi, $K.Id_2$ est bien un sous-anneau de $M_2(K)$.
4. $I_d^2 = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = dI_d^2$.
On vérifie le critère de sous-anneau pour $K[I_d]$.

— $1_{M_2(K)} = Id_2 \in K[I_d]$ par définition, i.e., $K[I_d]$ est non-nul.
— $\forall A = a_1 Id_2 + a_2 I_d$, $B = b_1 Id_2 + b_2 I_d$, $C = c_1 Id_2 + c_2 I_d \in K[I_d]$, on a :
$$\begin{aligned} AB - C &= (a_1 Id_2 + a_2 I_d)(b_1 Id_2 + b_2 I_d) - (c_1 Id_2 + c_2 I_d) && (5)\\ &= a_1 b_1 Id_2^2 + a_2 b_1 I_d Id_2 + a_1 b_2 Id_2 I_d + a_2 b_2 I_d^2 - c_1 Id_2 - c_2 I_d && (6)\\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 d) Id_2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2 - c_2) I_d \in K[I_d] && (7)\end{aligned}$$
car $a_1b_1 + a_2b_2d + c_2$,$a_2b_1 + a_1b_2 - c_2 \in K$ vu que K est un corps.

Donc $K[I_d]$ est bien un sous-anneau non-nul de $M_2(K)$.

5. Si $d = 0$ alors $K[I_d]$ n'est pas un anneau intègre car $\forall a, b \in K$ on a :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. On vérifie facilement que $\mathcal{B}' = \{Id_2, I_d\}$ est une base du K-EV $K[I_d]$.
En effet, par définition de $K[I_d]$, $\mathcal{B}'$ est une famille génératrice. De plus, si pour certains $a, b \in K$ on a $a \cdot Id_2 + b \cdot I_d = O_{M_2(K)}$ alors on aura forcément $a = 0 = b$ donc c'est aussi une famille libre.

7. $x^2 = dy^2 \in K \implies d = (\frac{x}{y})^2 = (xy^{-1})^2$ mais $xy^{-1} \in K$ (car K est un corps), ce qui contredit l'hypothèse que d n'est pas un carré dans K. Ainsi on a bien montré que si d n'est pas un carré dans K, l'équation $x^2 - dy^2 = 0$ n'a pas de solution $x, y \in K$.

8. Soit $Z = \begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix} \in K[I_d]$, alors det (Z)= $x^2 - dy^2 \neq 0$ par la question précédente (car d n'est pas un carré dans K ici), ainsi toutes les matrices de $K[I_d]$ possèdent une matrice inverse. Vérifions que l'inverde de Z est toujours dans $K[I_d]$:
$$Z^{-1} = \frac{1}{det(Z)}\begin{pmatrix} x & -dy \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 - dy^2}\begin{pmatrix} x & -dy \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{x}{x^2 - dy^2} Id_2 + \frac{-y}{x^2 - dy^2} I_d \in K[I_d]$$
car $x(x^2 - dy^2)^{-1}$,$-dy(x^2 - dy^2)^{-1} \in K$.

9. Supposons que $d = u^2$ pour un certain $u \in K$. Alors on a :

$$\begin{pmatrix} u & d \\ 1 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -d \\ -1 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 - d & -du + du \\ u - u & -d + u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc si d est un carré dans le corps K, $K[I_d]$ n'est pas intègre.

Exercice 10 :

1. Card($M_2(\mathbb{F}_p)$) $= p^4$ et Card($K[I_d]$)$= p^2$.

2. On peut vérifier que chaque carré de $\mathbb{F}_3$ n'est pas égal a $-1(\text{mod}3)$.

3. Idem pour les carrés de $\mathbb{F}_5$.

4. Pour un corps à 9 éléments, on peut prendre $\mathbb{F}_3[I_2] = \mathbb{F}_9$ et pour un corps à 25 éléments $\mathbb{F}_5[I_2] = \mathbb{F}_{25}$, en utilisant la première question ainsi que l'exercice précédent.

5. $-1(\text{mod}3) = 2(\text{mod}3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est donc bien un carré dans $\mathbb{F}_9$ mais pas dans $\mathbb{F}_3 = \mathbb{F}_3 Id_2$ (c'est facile de le vérifier étant donné qu'uniquement 3 matrices sont dans $\mathbb{F}_3$).

6. De même, $2(\text{mod}5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un carré dans $\mathbb{F}_{25}$ mais pas dans $\mathbb{F}_5$.