# Correction exercice étoilé, série 6 Algèbre linéaire avancée I

13 Novembre 2022

## Exercice 5 :

1. Soit $\mathcal{L} = \{v_1, \ldots, v_2\} \subset V$ une partie libre, montrons que $\varphi(\mathcal{L}) = \{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ est libre. Supposons que $\sum \lambda_i \varphi(v_i) = 0$. Alors $\varphi(\sum \lambda_i v_i) = 0$ Comme $\varphi$ est injective, on a donc $\sum \lambda_i v_i = 0$ et ainsi $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ puisque $\mathcal{L}$ est une famille libre. On a donc montré que $\varphi(\mathcal{L})$ est une famille libre.
   Prenons une base $\mathcal{B}$ de V, c'est donc une famille libre, ainsi $\varphi(\mathcal{B}) \subset W$ est aussi une famille libre. En particulier, si $\mathcal{B}'$ est une base de W, alors $|\varphi(\mathcal{B})| \leq |\mathcal{B}'| = \dim(W)$. Alors $\dim(V) = |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'| = \dim(W)$.

2. Soit $\mathcal{G} \subset V$ une famille génératrice, écrivons $\mathcal{G} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et montrons que $\varphi(\mathcal{G}) = \{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Pour cela, prenons w$\in\mathrm{Im}(\varphi)$, donc il existe un v$\in$V tel que w=$\varphi$(v), et v=$\sum \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \in$K. Donc w=$\varphi$(v)=$\varphi(\sum \lambda_i v_i)$=$\sum \lambda_i \varphi(v_i)$, car $\varphi$ est un homomorphisme. On a montré que n'importe quel w$\in\mathrm{Im}(\varphi)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$, donc $\mathrm{Im}(\varphi)$ est une famille génératrice.
   En particulier, si on choisit une base $\mathcal{B}$ de V, alors : dim(V) = $|\mathcal{B}| \geq |\varphi(\mathcal{B})| \geq |\mathcal{B}'|$=dim(Im($\varphi$)), où $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   Si $\varphi$ est surjective, alors Im($\varphi$)=W et le résultat voulu découle directement.

3. Si $\varphi$ est bijective alors elle est surjective et injective et le résultat suit des points précédents.