EPFL

Prof. L. Chizat
Analyse I - XXX
Novembre 2022
1 heure

251

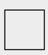
XXX-5

SCIPER: **FAKE-5**

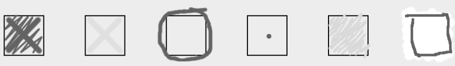
Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages (les dernières pouvant être vides), et 13 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
		

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}\,.$$

Alors :

- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3}-\sqrt{2}$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Question 2 : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Alors:

- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 3$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$
- ☐ $(x_n)_{n\geq 0}$ diverge
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 8$

Question 3 : Soit la série avec paramètre $b \in \mathbb{R}$ définie par :

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2b + \frac{1}{k}\right)^k$$

Alors s converge si et seulement si :

- ☐ $b \leq \frac{1}{2}$
- ☐ $b \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- ☐ $b < \frac{1}{2}$
- ☐ $b \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

Question 4 : La limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{2n-\sqrt{3n}}}}$

- ☐ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$
- ☐ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{6}}$
- ☐ existe et vaut 1
- ☐ n'existe pas

Question 5 : Soit $z = \dfrac{2\,\mathrm{i}^9 - 4\,\mathrm{i}^{15}}{1-\mathrm{i}}$. Alors:

- ☐ $z^6 = 8\cdot 3^6\,\mathrm{i}$
- ☐ $z^6 = 8\cdot 3^6(1+\mathrm{i})$
- ☐ $z^6 = 8\cdot 3^6$
- ☐ $z^6 = -8\cdot 3^6\,\mathrm{i}$

Question 6 : Dans les nombres complexes une solution de l'équation $z^4 + (4+3\mathrm{i})^2 = 0$ est :

- ☐ $z = 2-\mathrm{i}$
- ☐ $z = 1-2\mathrm{i}$
- ☐ $z = 2+\mathrm{i}$
- ☐ $z = (4+3\mathrm{i})/2$

Question 7 : Soit $A = \{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } y = e^{-x} \}$. Alors

- [ ] $\operatorname{Sup} A = \mathrm{e}$
- [ ] $\operatorname{Sup} A = 1$
- [ ] $\operatorname{Inf} A = 1$
- [ ] A n'est pas majoré

Question 8 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $a_n = \dfrac{(-2)^n (n!)^2}{(2n)!}$. Alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est:

- [ ] absolument convergente
- [ ] convergente mais pas absolument convergente
- [ ] divergente car $|a_n| \to +\infty$
- [ ] divergente car $|a_n| \to 1$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, il existe une infinité de nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}(\omega z) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Il existe une fonction bijective et continue $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, et soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Si A est majoré, alors B est majoré.

☐ VRAI ☐ FAUX