- Donc $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M < +\infty$
  Donc $M$ est un maximum.
  (la démonstration est analogue pour le minimum). ■

fin cours 10/11

Détails sur $(*)$ : $M = \sup A$ avec $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ t.q $M - \varepsilon \leqslant a$ et $a \leqslant M$ donc $|a - M| \leqslant \varepsilon$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ il s'ensuit $\exists a_n \in A$ tel que $|a_n - M| \leqslant \frac{1}{n}$.

Dans le cadre de $(*)$ : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a,b]$ tel que $|f(x_n) - M| \leqslant \frac{1}{n}$.

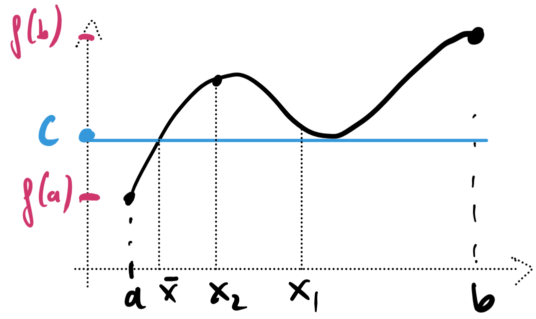
Ceci est un exemple de suite $(x_n)_{n \geq 1}$ satisfaisant $(*)$.

**Thm.2 (Thm des valeurs intermédiaires).** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
Alors $f$ prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est à dire :

- si $f(a) \leqslant f(b)$ alors $[f(a), f(b)] \subset \mathrm{Im}(f)$
- si $f(a) \geqslant f(b)$ alors $[f(b), f(a)] \subset \mathrm{Im}(f)$.

Preuve : Supposons $f(a) \leqslant f(b)$ (l'autre cas se traite de façon analogue).
Soit $c \in [f(a), f(b)]$. Montrons que $\exists \bar{x} \in [a,b]$ t.q. $f(\bar{x}) = c$.

- Si $c = f(a)$ alors on pose $\bar{x} = a$.
  $c = f(b)$ alors —— $\bar{x} = b$.
- Sinon $c \in ]f(a), f(b)[$. On pose $g(x) = f(x) - c$.
  Alors $g$ est continue sur $[a,b]$ et $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$.
  On va construire $\bar{x} \in ]a,b[$ t.q $g(\bar{x}) = 0$ avec l'algorithme de dichotomie (ou bissection).




$x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ si $\begin{cases} g(x_1) = 0 & \text{on pose } \bar{x} = x_1 \\ g(x_1) < 0 & \text{on pose } a_1 = x_1 \text{ et } b_1 = b \\ g(x_1) > 0 & \text{on pose } a_1 = a \text{ et } b_1 = x_1 \end{cases}$

$\vdots$

$x_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ si $\begin{cases} g(x_n) = 0 & \text{on pose } \bar{x} = x_n \\ g(x_n) < 0 & \text{on pose } a_n = x_n \text{ et } b_n = b_{n-1} \\ g(x_n) > 0 & \text{on pose } a_n = a_{n-1} \text{ et } b_n = x_n \end{cases}$

- Soit $\exists n \in \mathbb{N}^*$ t.q $g(x_n) = 0$ dans ce cas on pose $\bar{x} = x_n$ et on a terminé.
- Sinon, on a défini 2 suites : $\begin{cases} (a_n)_{n \geq 1} \text{ croissante et majorée par } b. \\ (b_n)_{n \geq 1} \text{ décroissante et minorée par } a. \end{cases}$

De plus $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ (par récurrence), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$

Donc $(a_n)$ et $(b_n)$ sont des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite $\ell \in [a, b]$.

On a
- $\lim\limits_{n \to +\infty} g(a_n) \begin{cases} \leq 0 & \text{car } g(a_n) \leq 0, \forall n \\ = g(\ell) & \text{par continuité de } g. \end{cases}$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} g(b_n) \begin{cases} \geq 0 & \text{car } g(b_n) \geq 0, \forall n \\ = g(\ell) & \text{par continuité de } g \end{cases}$

On en déduit $g(\ell) = 0$. On pose donc $\bar{x} = \ell$ et on a $\begin{cases} \bar{x} \in [a, b] \\ f(\bar{x}) = c \end{cases}$ ∎

**Thm. 3** (synthèse de Thm 1 et Thm 2). Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue alors $\operatorname{Im}(f) = [m, M]$ où $\begin{cases} m := \min(f) \text{ existe.} \\ M := \max(f) \text{ existe.} \end{cases}$

- "L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné".
- La fonction $f$ prend toutes les valeurs entre $\min(f)$ et $\max(f)$.

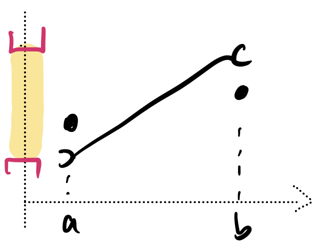
__Preuve :__ • Par le Thm. 1, $\exists\, c, C \in [a,b]$ t.q $\begin{cases} f(c) = m := \min(f). \\ f(C) = M := \max(f). \end{cases}$

On en déduit $\operatorname{Im}(f) \subset [m, M]$

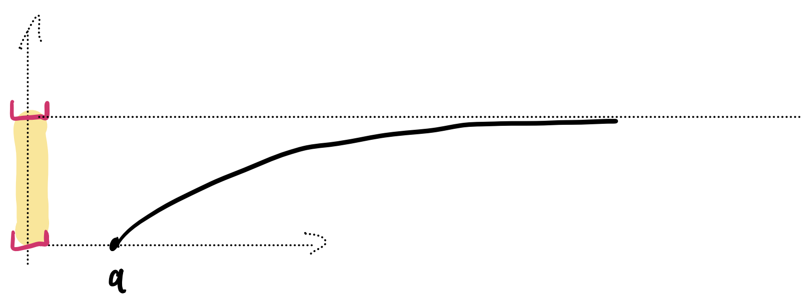
• $[m,M] = [f(c), f(C)] \underset{\substack{\text{donnée par} \\ \text{Thm. 2}}}{\subset} \operatorname{Im}(\underbrace{f_{|[c,C]}}_{\text{Restriction de } f \text{ à l'intervalle } [c,C]}) \subset \operatorname{Im}(f)$

• On en déduit $\operatorname{Im}(f) = [m, M]$. ∎

__Illustrations :__




$f$ continue sur $]a,b[$ mais pas sur $[a,b]$
→ le max / min ne sont pas atteints.

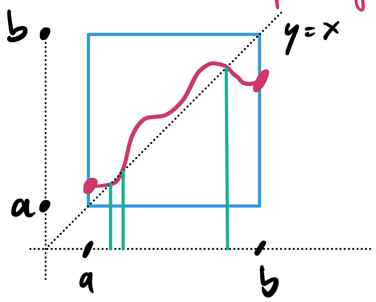



$f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ continue
mais l'intervalle de définition n'est pas borné

## Conséquence de Thm 3 : existence de points fixes.

**Proposition :** Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue.
Il existe $\bar{x} \in [a,b]$ t.q. $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

point fixe de $f$.




**Preuve :** Soit $g(x) = f(x) - x$, continue sur $[a,b]$.

On a $\begin{cases} f(a) \geq a & \text{donc } g(a) \geq 0 \\ f(b) \leq b & \text{donc } g(b) \leq 0 \end{cases}$

Par le T.V.I (Thm.2), $\exists\, \bar{x} \in [a,b]$ t.q. $g(\bar{x}) = 0$ donc $f(\bar{x}) = \bar{x}$ ∎

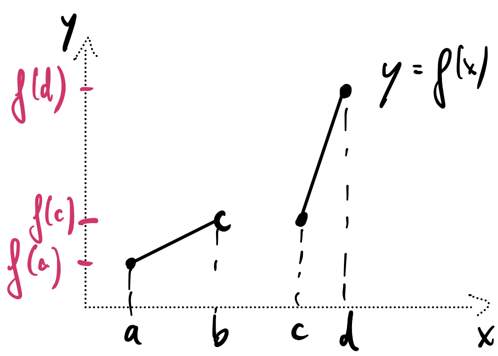
## 5.8. Fonctions réciproques des fonctions continues.

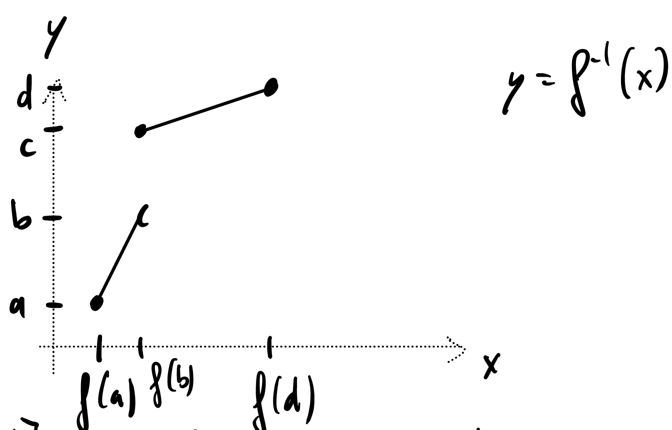
**Rappel :** Si $f : D \to \mathrm{Im}(f)$ est injective alors $f$ est bijective.

$f$ est automatiquement surjective.

**Thm.** La réciproque d'une fonction continue injective (existe, et) est continue sur l'image de tout intervalle.

**Exemple :**




$f : [a,b[ \cup [c,d] \to [f(a), f(d)] = \mathrm{Im}(f)$ est bijective.

$f$ est continue mais $f^{-1}$ n'est pas continue ($D(f)$ n'est pas un intervalle).

Par contre $f|_{[a,b[}$ admet une réciproque continue.

de même $f|_{[c,d]}$ ______________________________.

# Chapitre 6 : Calcul différentiel

Dans ce chapitre $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in ]a,b[ \subset D$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

## 6.1 Définition

**Def (dérivabilité).** Une fonction $f$ est dérivable en $x_0$ ssi :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et } \in \mathbb{R}.$$

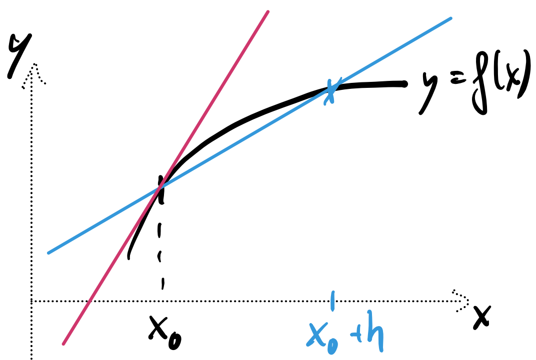
Remarque : $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ en posant $x = x_0 + h$

Cette limite est appelée la dérivée de $f$ en $x_0$ et notée $f'(x_0)$.

Exemple : Soit $f(x) = \sin(x)$ et $x_0 = 0$, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \overset{\text{déjà vue.}}{=} 1$$

Interprétation graphique :



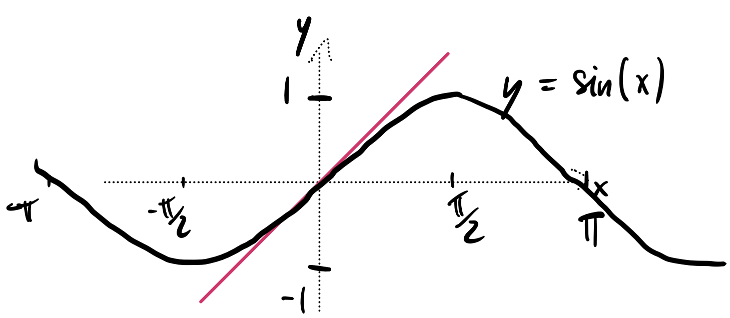

Droite bleue :

$$y = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow h \to 0} \cdot (x - x_0)$$

Droite rouge :

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Exemple :



**Def** : (différentiabilité). Une fonction $f$ est différentiable en $x_0$ ssi

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.q $\quad f(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0) + r(x)$

où $r(x)$ vérifie $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{r(x)}{x - x_0} = 0 \longrightarrow$ Plus exigeant que $\lim\limits_{x \to 0} r(x) = 0$

fin cours 14/11