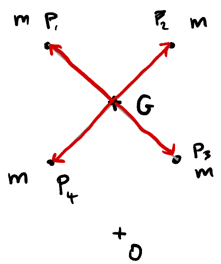
Problèmes à deux corps

I) Centre de masse



Lorsque G est choisi comme origine :

$$\boxed{\overrightarrow{GG} = \vec{0} = \sum_i m_i \overrightarrow{GP_i}}$$

2ème loi de Newton appliquée au c.d.m. :

$$\vec{v}_G = \frac{d}{dt}\underbrace{\overrightarrow{OG}}_{\vec{r}_G} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{OP_i}\right) = \frac{1}{M}\cdot\sum_i m_i \vec{v}_i$$

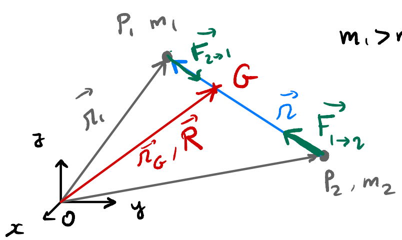
$$= \frac{1}{M}\vec{P}_{tot}$$

donc $\boxed{\vec{p} = M\vec{v}_G}$

2ème loi : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{ext,i}$ ou encore $\boxed{M\dfrac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_i \vec{F}_{ext,i}}$ $\quad M = \sum_i m_i$

↳ Le centre de masse accélère tel un point matériel de masse M subissant toutes les forces externes appliquées aux points P_i.

Décrire le mouvement de deux points matériels en interaction



$m_1 > m_2$

On introduit la coordonnée relative : position

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2} = \overrightarrow{P_2P_1} \qquad (\text{ou } \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \text{ aussi possible})$$

Admettons que $\boxed{\vec{F}_{ext,1} = \vec{F}_{ext,2} = \vec{0}}$ Système isolé

2ème loi :

$$\left.\begin{array}{lll} (P_1) & m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2\to1} & (\times m_2) \\ (P_2) & m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1\to2} & (m_1) \end{array}\right\} \quad m_1 m_2(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = m_2\vec{F}_{2\to1} - m_1\vec{F}_{1\to2}$$

$$= (m_2 + m_1)\vec{F}_{2\to1} \quad (3^{\text{ème}} \text{ loi})$$

Donc $\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2\to 1}}$ où $\boxed{\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$ est la masse réduite

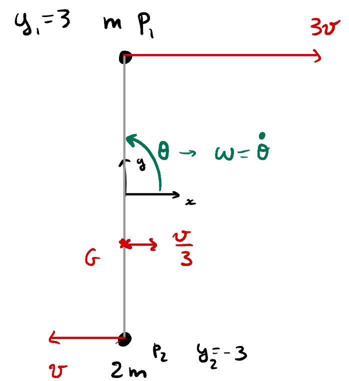
Remarques :

- si $m_1 \gg m_2$ alors $\mu \simeq m_2$ et $M \simeq m_1$ (ex : m_1 = soleil, m_2 = terre)
- si $m_1 = m_2 = m$ alors $\mu = \dfrac{m}{2}$ et $M = 2m$ (ex : molécule O_2, H_2, N_2 ...)
- Comme $\vec{F}_{2\to 1} \parallel \vec{r}$ le mouvement relatif est central.

Quizz

$\vec{GP_1} = -2\vec{GP_2}$

$$\boxed{\frac{|\vec{GP_1}|}{|\vec{GP_2}|} = \frac{m_2}{m_1}}$$



On cherche G tel que

$$m\vec{GP_1} + 2m\vec{GP_2} = \vec{0}$$

$$\vec{GP_1} + 2\vec{GP_2} = 0$$

En particulier selon y :

$$(y_1 - y_G) + 2(y_2 - y_G) = 0$$

$$3 - y_G + (-6 - 2y_G) = 0$$

$$-3y_G - 3 = 0$$

$$\boxed{y_G = -1}$$

En utilisant la définition primaire du c.d.m :

1) $y_G = \dfrac{1}{3m}(m y_1 + 2m y_2) = \dfrac{1}{3}(3 - 2\times 3) = \boxed{-1}$

2) v_G ? $\quad v_{G,x} = \dfrac{1}{3m}(m v_{1,x} + 2m v_{2,x}) = \dfrac{1}{3}(3v - 2v) = \boxed{\dfrac{v}{3}}$

3) Vitesse relative dans réf du c.d.m $v'_{2,x} = v_{2,x} - v_{G,x} = -v - \dfrac{v}{3} = \boxed{-\dfrac{4v}{3}}$

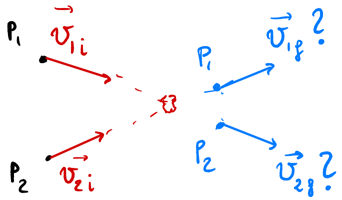
De même $v'_{1,x} = 3v - \dfrac{v}{3} = \dfrac{8}{3}v$

4) $|\omega|$ vitesse de rotation ? Dans le réf. du c.d.m :

$$|\vec{v_2}| = \|\vec{GP_2}\| \times |\omega| \Rightarrow \frac{4v}{3} = \underbrace{\frac{2\ell}{6}}_{\frac{\ell}{3}} |\omega| \quad \text{donc} \quad |\omega| = \frac{4v}{3} \times \frac{6}{2\ell} = \boxed{\frac{4v}{\ell}}$$

II) Collisions

On considère 2 points matériels isolés (pour chacun $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$)



On va résoudre ce problème en utilisant les lois de conservation
↳ pas besoin de connaître les détails des forces internes

A) Quantité de mouvement totale : tjs conservée car système isolé

Dans une collision, il y a seulement des transferts de qté mvt.

B) (Moment cinétique total) : conservé aussi

C) Energie ? (on considère energie potentielle = 0) → reste energie cinétique

$$\Delta K = K_{tot,f} - K_{tot,i} \qquad \text{où} \qquad K_{tot} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

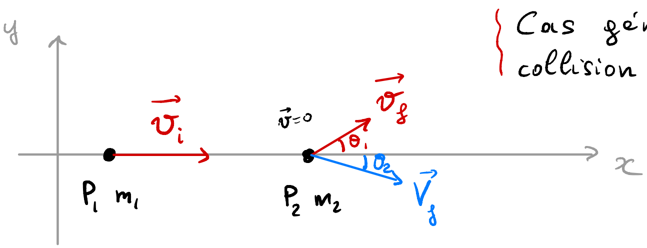
① $\Delta K = 0$ ⟶ choc élastique, énergie conservée

② $\Delta K \neq 0$ → chocs inélastique
- $\Delta K > 0$: exo-énergétique (explosion)
- $\Delta K < 0$: endo-énergétique
  ↳ cinétique ⟶ thermique

Cas particulier : choc "mou" ⟶ $\boxed{\text{fusion des deux corps} \;\; \hookrightarrow \; \vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{V}_f}$

Exemple

Cas général de collision élastique en 2D



Situation initiale : $|\vec{v}_1| = v_i$; $|\vec{v}_2| = 0$

—— finale : $|\vec{v}_1| = v_f$; $|\vec{v}_2| = V_f$

* Système isolé → $\vec{p}_{tot}$ constante : $m_1 \vec{v}_i = m_1 \vec{v}_f + m_2 \vec{V}_f$

$$\hat{e}_x : \quad m_1 v_i = m_1 v_f \cos\theta_1 + m_2 V_f \cos\theta_2$$
$$\hat{e}_y : \quad 0 = m_1 v_f \sin\theta_1 - m_2 V_f \sin\theta_2$$

⚠ $\theta_1, \theta_2 > 0$ comptés positifs

⚠ ici $v_i, v_f, V_f > 0$ (normes des vecteurs)

I) Choc élastique ⇒ $\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_f^2 + \frac{1}{2} m_2 V_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v_i^2 = 0$

$$\Rightarrow m_2 V_f^2 = m_1 v_i^2 - m_1 v_f^2 \Rightarrow \boxed{V_f^2 = \frac{m_1}{m_2}(v_i^2 - v_f^2)} \quad (1)$$

Or on peut aussi exprimer V_f^2 grâce à la qté de mvt :

$$m_2 \vec{V}_f = m_1 \vec{v}_i - m_1 \vec{v}_f \Leftrightarrow \vec{V}_f = \frac{m_1}{m_2}(\vec{v}_i - \vec{v}_f)$$

d'où $$\boxed{V_f^2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \left(v_i^2 + v_f^2 - 2 \underbrace{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_f}_{v_i v_f \cos\theta_1}\right)} \quad (2)$$

Avec (1) & (2) : $$\frac{m_1}{m_2}(v_i^2 - v_f^2) = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 (v_i^2 + v_f^2 - 2 v_i v_f \cos\theta_1)$$

Posons $\boxed{x = \frac{v_f}{v_i} \in \mathbb{R}_+}$: $$1 - x^2 = \frac{m_1}{m_2}(1 + x^2 - 2\cos\theta_1 \, x)$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) - x \, 2\cos\theta_1 \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1 - m_2}{m_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x \, 2\cos\theta_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Equation du second degré en x

↳ On cherche les racines positives

$$\Delta = 4\cos^2\theta_1 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 - 4\,\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} = \frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left(\cos^2\theta_1 - \frac{(m_1+m_2)(m_1-m_2)}{m_1^2}\right)$$

$$= \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \left(\underbrace{\cos^2\theta_1 - 1}_{= -\sin^2\theta_1} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)\left(\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\theta_1\right)$$

* <u>Si $m_2 \geq m_1$</u> : alors $\Delta \geq 0$ pour tout angle θ_1 $\rightarrow$ toujours une solution

$$x_\pm = \cos\theta_1 \frac{m_1}{m_1+m_2} \pm \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(-\sin^2\theta_1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)^{1/2}$$

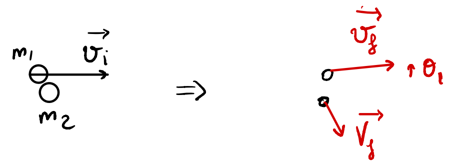
$$= \boxed{\frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\cos\theta_1 \pm \sqrt{-\sin^2\theta_1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}}\right)}$$

$\rightarrow$ solution : celle qui vérifie $x \geq 0$
x_+

* <u>Si $m_2 \leq m_1$</u> : on doit avoir $-\sin^2\theta_1 + \frac{m_2^2}{m_1^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sin\theta_1 \leq \frac{m_2}{m_1}$

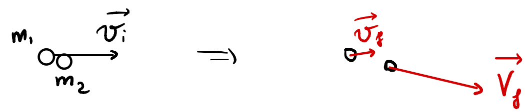
Il y a alors deux solutions positives correspondants au deux scénarios suivants :

① Collision "rasante"

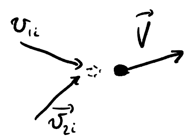


même θ_1
mais $\frac{v_f}{v_i}$ différ.

② Collision "frontale"



II) <u>Choc inélastique</u> $\rightarrow$ <u>choc mou</u> : $\vec{v}_{2f} = \vec{v}_{1f} = \vec{V}$



Donc $m_1\vec{v}_{1i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = (m_1+m_2)\vec{V}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}} \quad (3)$$

<u>dans le référentiel où m_2 est au repos</u>

Notons $\vec{V}'$, $\vec{v}_{1i}'$ les vitesses dans le réf. du laboratoire :

$\longrightarrow$ $\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1i}' - \underbrace{\vec{v}_{2i}'}_{\text{vitesse de } m_2 \text{ p/r au laboratoire}}$ et $\vec{V} = \vec{V}' - \vec{v}_{2i}'$

(3) $\rightarrow$ $\vec{V}' - \vec{v}_{2i}' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\vec{v}_{1i}' - \vec{v}_{2i}'\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}' + \left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{v}_{2i}' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}' + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{2i}'}$$

symétrie $1 \leftrightarrow 2$

Si $m_1 \gg m_2$ alors $\vec{V}' = \vec{v}_{1i}'$ (" mouche vs. pare-brise ")

Si $m_1 = m_2 = m$ alors $\vec{V}' = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_{1i}' + \vec{v}_{2i}'\right)$

Perte d'énergie cinétique totale ?

$$\Delta K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{V}'^2 - \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1i}'^2 - \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2i}'^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}'^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1+m_2}\vec{v}_{2i}'^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}'\cdot\vec{v}_{2i}' - \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1i}'^2 - \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2i}'^2$$

Cas où $\vec{v}_{2i} = \vec{0}$: $\Delta K = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_1}{m_1+m_2} - 1\right)\vec{v}_{1i}'^2 = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}'^2 < 0}$

("cible immobile")

* Si $m_1 \gg m_2$ $|\Delta K| = \left|-\frac{1}{2}m_2\vec{v}_{1i}'^2\right| \ll \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1i}'^2 = K_{1i}$
* Si $m_2 \gg m_1$ $|\Delta K| = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1i}'^2 = K_{1i}$ $\rightarrow$ toute l'énergie cinétique est dissipée sous forme de chaleur.

III) Collision élastique à 1D

* Conditions initiales : $\vec{v}_1 = v_1\hat{e}_x$ et $\vec{v}_2 = v_2\hat{e}_x$ $(v_1, v_2 \gtrless 0)$
* On se place dans le référentiel en translation rectiligne uniforme $\vec{v}_2$ p/r au laboratoire (aussi galiléen)

Dans ce référentiel : $\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (v_1 - v_2)\hat{e}_x$

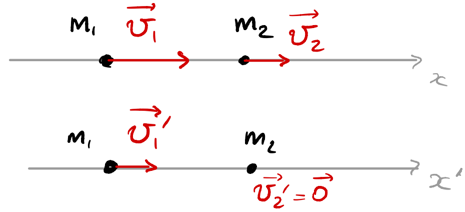
* Conservation quantité de mvt :

Selon x : $m_1 v_1' = m_1 v_{1f}' + m_2 v_{2f}'$

$$\Leftrightarrow m_1(v_1' - v_{1f}') = m_2 v_{2f}' \quad (1)$$

Labo :

Réf. $\vec{v}_2$:



* Choc élastique : conservation énergie cinétique

$$\Delta K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 v_1'^2 = m_1 v_{1f}'^2 + m_2 v_{2f}'^2$$

$$\Leftrightarrow \quad m_1(v_1'^2 - v_{1f}'^2) = m_2 v_{2f}'^2$$

$$\Leftrightarrow \quad m_1(v_1' - v_{1f}')(v_1' + v_{1f}') = m_2 v_{2f}'^2 \quad (2)$$

Si $v_{1f}' = v_1$ alors il n'y a pas eu de collision et $v_{2f}' = 0$

Sinon on a le droit de diviser eq.(2) par eq.(1) et on trouve :

$$v_1' + v_{1f}' = v_{2f}' \quad (3)$$

On élimine v_{2f}' en faisant $m_2 \times (3) - (1)$:

$$m_2 v_1' + m_2 v_{1f}' - m_1 v_1' + m_1 v_{1f}' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{v_{1f}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1'} \quad (4)$$

On élimine v_{1f}' en faisant $m_1 \times (3) + (1)$:

$$2 m_1 v_1' = (m_1 + m_2) v_{2f}'$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{v_{2f}' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1'} \quad (5)$$

On retourne désormais dans le réf. du laboratoire

$$(4) \longrightarrow \quad v_{1f} - v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2$$

$$\boxed{v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2}$$

De même selon (5) : $\boxed{v_{2f} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2}$

(Symétrie $1 \leftrightarrow 2$ respectée)

<u>Cas limites</u> :

* $m_1 \gg m_2 \longrightarrow v_{1f} \simeq v_1$ et $v_{2f} = 2 v_1 - v_2$
  - ↳ En particulier si $v_2 = 0$ alors $v_{2f} = 2 v_1$
    - <u>ex</u> : coup de raquette dans une balle de tennis (ou club de golf ...)
  - ↳ Au contraire si $v_1 = 0$ alors $v_{2f} = - v_2$
    - <u>ex</u> : rebond d'une balle élastique sur la terre ferme.

* <u>$m_1 = m_2 = m$</u> $\longrightarrow v_{1f} = v_2$ et $v_{2f} = v_1 \longrightarrow$ <u>échange des vitesses</u>