Corrigé série 9

Exercice 1 (10 points)

a) $f'(x) = 3e^{3x}$

b) $f'(x) = (2x+1)e^{-2x} + (x^2+x+1)e^{-2x} \cdot (-2) = e^{-2x}(2x+1-2x^2-2x-2) = e^{-2x}(-2x^2-1)$
$= -e^{-2x}(1+2x^2)$

c) $f'(x) = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \dfrac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2}$

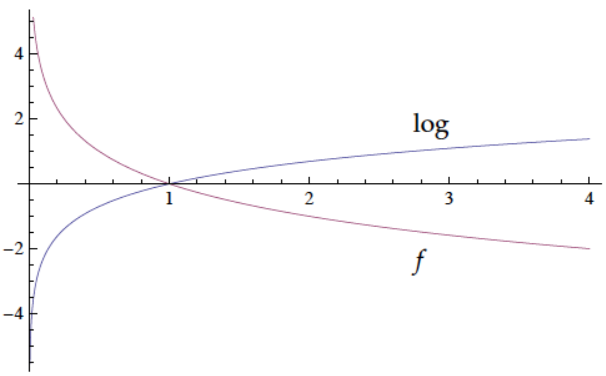
d) $f'(x) = \dfrac{5}{5x} = \dfrac{1}{x}$

e) $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\ln(x) - (x^2-x) \cdot \frac{1}{x}}{\ln(x)^2} = \dfrac{(2x-1)\ln(x) - x + 1}{\ln(x)^2}$

f) $f'(x) = \dfrac{1-2x}{x-x^2}$

Exercice 2 (20 points)

a) Comme $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(1/2)} = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$, on peut s'attendre à ce que f ait essentiellement le même comportement que la fonction ln, à la différence que, comme $\ln(1/2) < 0$, tout sera "inversé" :



Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_{>0}$, elle n'a pas de points de discontinuité. Ici, il n'y a pas lieu de parler de parité, et f n'est pas périodique (comme elle converge vers $-\infty$ pour $x \to \infty$). Pour $x \to 0$, $f(x) \to +\infty$ (comme elle a un comportement symétrique par rapport à ln), elle admet donc un asymptote verticale en $x = 0$.

Comme $\dfrac{f(x)}{x} \to 0$ pour $x \to \infty$, mais $(f(x) - 0 \cdot x) \to \infty$ pour $x \to \infty$, il n'y a pas d'asymptote oblique.

La dérivée de f est

$$f'(x) = -\frac{1}{x\ln(2)},$$

elle a donc le même domaine de définition que f, et est partout strictement négative. Elle converge vers $-\infty$ pour $x \to 0$, et vers 0 pour $x \to \infty$.

La dérivée seconde de f est

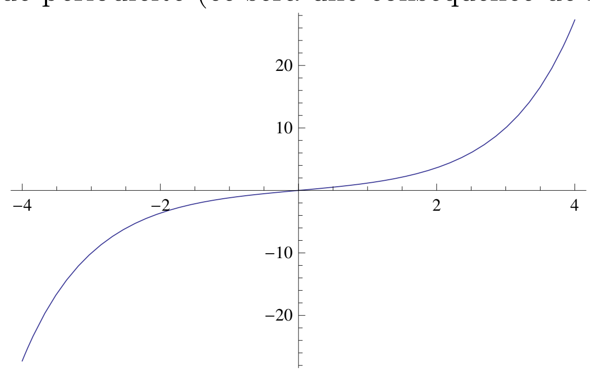
$$f''(x) = \frac{1}{x^2\ln(2)},$$

elle a donc le même domaine de définition que f, et est partout strictement positive. Elle converge vers ∞ pour $x \to 0$, et vers 0 pour $x \to \infty$.

On déduit de ces observation que f est partout convexe, sans point d'inflexion, sans extrema.

L'équation $f(x) = 0$ a pour seul solution $x = 1$. Comme f est décroissante, cela implique que f est positive sur $]0, 1[$ et négative sur $]1, \infty[$.

b) Comme $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, il est ici clair que la fonction est impaire. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, elle n'admet pas de périodicité (ce sera une conséquence de l'étude de sa dérivée).



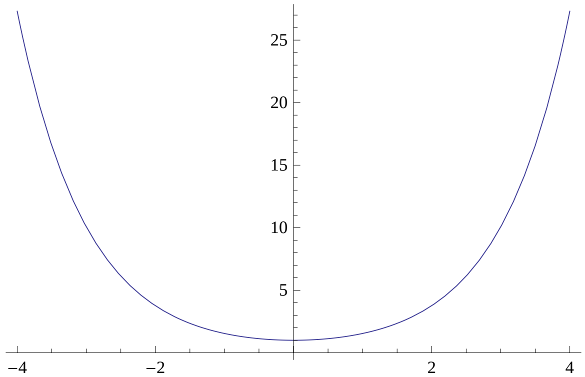
La fonction f converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$). Il est facile de vérifier qu'il n'y a pas d'asymptotes (verticales/horizontales/obliques).

La dérivée est f est $f'(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, qui est définie sur tout $\mathbb{R}$ et partout strictement positive, ayant deux limites à ∞ pour $x \to \pm\infty$.

La dérivée seconde de f est $f''(x) = \sinh(x) = f(x)$.

Il découle de ces observations que f est partout strictement croissante, sans extrema locaux, avec un point d'inflexion quand sa dérivée seconde change de signe : comme $f''(x) = f(x)$, cela revient à résoudre $f(x) = 0$, qui a pour unique solution $x = 0$. Ainsi, f est concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, \infty[$.

c) Ici, $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, on voit donc que f est paire, son domaine de définition est égal à $\mathbb{R}$ et qu'elle n'admet pas de périodicité.



La fonction f converge vers ∞ pour $x \to \pm\infty$; ayant dans les deux cas un comportement purement exponentiel, elle n'a pas d'asymptotes (verticales/horizontales/obliques).

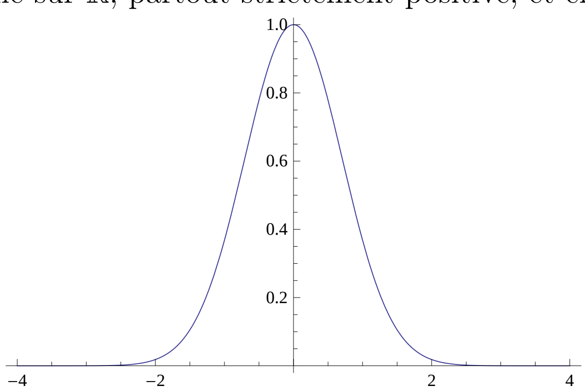
La dérivée de f est $f'(x) = \sinh(x)$, que nous avons déjà étudiée ; sa dérivée seconde est $f''(x) = \cosh(x) = f(x)$.

Ainsi, on a que f est partout strictement positive, décroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $]0, \infty[$, elle atteint donc un minimum global en $x = 0$, ayant pour ordonnée

$$f(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1.$$

Comme f'' est partout strictement positive, f n'a pas de point d'inflexion, elle est partout convexe.

d) Ici $f(x) = e^{-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$, partout strictement positive, et clairement paire.



Elle admet deux asymptotes horizontales d'équations $y = 0$ pour $x \to \pm\infty$, mais n'a pas d'asymptotes verticales ou obliques.

Sa dérivée est

$$f'(x) = -2e^{-x^2}x = \frac{-2x}{e^{x^2}},$$

qui converge vers 0 pour $x \to \pm\infty$. La dérivée f' à le signe de l'opposé de son argument, ainsi f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $]0, \infty[$, elle admet donc un maximum global en $x = 0$, où son ordonnée vaut $f(0) = 1$.

La dérivée seconde de f est
$$f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1),$$
qui est toujours positive sauf entre les racines de $2x^2 - 1$, qui sont $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, ainsi f est convexe sauf entre ces deux points, qui sont donc des points d'inflexion.

Exercice 3 (10 points)
On utilise plusieurs fois la règle de Bernoulli-L'Hospital sans le dire explicitement :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4\ln(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{3x^3} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\ln(x^4) = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+1}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{2x}{x^2-3} = 4$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x+\ln(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}} = \lim\limits_{x\to 1} -\frac{2\left(\frac{1}{x}-1\right)\sqrt{2x-x^2}}{2-2x} = \lim\limits_{x\to 1} -\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} = -1$

Exercice 4 (5 points)
On calcule (de préférence avec une machine !) que $h(1) \approx 75.77$. De plus,
$$h'(x) = 6.39 + 0.993e^{3.261-0.993x}.$$
Ainsi, $h'(1) \approx 15.98$.
La deuxième partie du problème nous demande d'étudier la fonction h' pour trouver ses extrema sur l'intervalle $[0.25; 6]$. Posons
$$f(x) = h'(x) = 6.39 + 0.993e^{3.261-0.993x},$$
et calculons la dérivée de f
$$f'(x) = -0.986049e^{3.261-0.993x}.$$
Comme f' est toujours négative, le maximum de f est atteint au début de l'intervalle $[0.25; 6]$, et son minimum à la fin.

Exercice 5 (5 points)

De l'égalité

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1,$$

on déduit

$$2\left(\sqrt{3}\cosh(t)\right)^2 - 3\left(\sqrt{2}\sinh(t)\right)^2 = 6.$$

Ainsi, on pose

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\sinh(t), \\ y(t) = \sqrt{3}\cosh(t). \end{cases}$$

A noter que cette paramétrisation ne représente pas toutes les solutions réelles de $2y^2 - 3x^2 = 6$, car la valeur de $y(t)$ dans la paramétrisation est toujours positive, alors que $(x(t), -y(t))$ est aussi solution.

Exercice 6 (5 points)

a) Faux. Comme $3^x = e^{x \ln 3}$, il est facile de s'assurer que $x \mapsto 3^x$ est dérivable autant de fois qu'on le souhaite. En effet, une induction simple montre que la dérivée $n^{\text{ème}}$ (notée $(3^x)^{(n)}$) de 3^x est

$$(3^x)^{(n)} = \ln^n(3)e^{x \ln 3}.$$

b) Vrai. Même argument que pour le point précédent.

c) Faux. Comme on sait que $\sinh(x)$ est strictement croissante (cf. exercice **??**), il ne peut pas y avoir de périodicité. En effet, la condition

$$\sinh(x) = \sinh(x + P), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

pour un $P > 0$ contredirait la croissance stricte de $\sinh(x)$.

d) Faux. Pour obtenir une contradiction, supposons que

$$\cosh(x) = ax^2 + bx + c$$

pour certaines constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Alors, on aura

$$1 = \cosh(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c,$$

et donc, c=1.

De plus, comme $\cosh(x)$ est paire (cf. exercice **??**),

$$a + b + 1 = \cosh(1) = \cosh(-1) = a - b + 1,$$

d'où $a + b = a - b$, et donc $b = 0$. On a maintenant,

$$\cosh(x) = ax^2 + 1.$$

De $\cosh(2) = a \cdot 4 + 1$, on déduit que $a \approx 0.69$, alors que de $\cosh(3) = a \cdot 9 + 1$, on déduit que $a \approx 1.01$. Nous avons une contradiction.

Exercice 7 (5 points)

Il découle de notre analyse de la fonction sinh de l'exercice **??** que sinh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, elle est strictement croissante et on a

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty.$$

Un résultat élémentaire veut que

$$\begin{gathered}\text{une fonction } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est bijective} \\ \Leftrightarrow \\ \text{il existe une fonction } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \text{telle que les composées } f \circ g \text{ et } g \circ f \text{ sont l'identité sur } \mathbb{R}.\end{gathered}$$

Si f est bijective, il est facile de vérifier que g est en fait unique. On donne donc un nom à g (on l'appelle l'**inverse** de f) et on lui réserve un symbole (on le note f^{-1}).
Comme on sait que sinh est bijective (cf ci-dessus), on doit montrer ici que

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \tag{1}$$

satisfait à

$$g \circ \sinh = \text{identité} \quad \text{et} \quad \sinh \circ g = \text{identité}$$

pour avoir que g est l'unique inverse de sinh. La bonne nouvelle, c'est qu'en fait nous n'aurons à vérifier qu'une seule de ces égalités. En effet, posons id la fonction identité de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\sinh^{-1}$ l'unique inverse de sinh. Alors, si une fonction (quelconque) g satisfait $g \circ \sinh = \text{id}$, on aura

$$\begin{aligned} g &= g \circ \text{id} = g \circ (\sinh \circ \sinh^{-1}) = (g \circ \sinh) \circ \sinh^{-1} \\ &= \text{id} \circ \sinh^{-1} = \sinh^{-1}, \end{aligned}$$

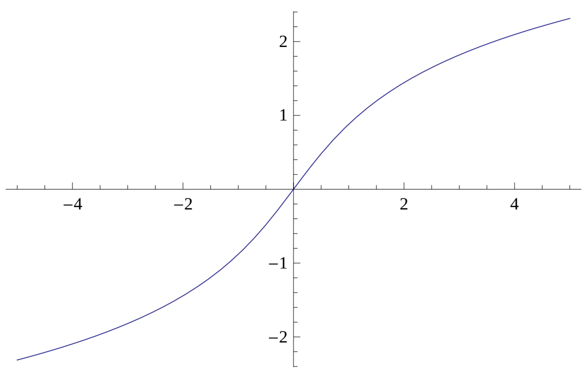
donc $g = \sinh^{-1}$.
Ainsi, il nous suffit de montrer que la fonction g définie dans (**??**) satisfait à $g \circ \sinh = \text{id}$ pour

pouvoir conclure.
Soit donc $x \in \mathbb{R}$. On a

$$g \circ \sinh(x) = g\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} + 1}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}}\right) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \ln(e^x) = x.$$

Ce qui montre que l'inverse de sinh est bien $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
On a

$$g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ et } g''(x) = -\frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$



Exercice 8 (5 points)
Si on suit l'indication, on arrive à l'équation

$$2^{-2}y^2 - y - 3 = 0,$$

qui est équivalente à

$$y^2 - 4y - 12 = 0.$$

En factorisant, on trouve $y = -2$ ou $y = 6$, et donc on a les deux possibilités

$$2^{2x} = -2 \quad \text{et} \quad 2^{2x} = 6.$$

Comme 2^y est toujours positif pour tout $y \in \mathbb{R}$, la première possibilité $2^{2x} = -2$ est impossible, il ne nous reste donc que $2^{2x} = 6$, que l'on peut résoudre en appliquant le logarithme des deux côtés :

$$2x \ln(2) = \ln(6),$$

et donc $x = \frac{\ln(6)}{2\ln(2)} \approx 1.29$.

Exercice 9 (10 points)

a) On sait que $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ est une fonction bijective. Elle admet dont un inverse $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$. Pour vérifier qu'un candidat f est l'inverse de $\ln_a$, il nous suffit de vérifier que $\log_a \circ f =$ identité (cf question **??**).

On calcule donc

$$(\log_a \circ f)(x) = \log_a \left(e^{x\ln(a)}\right) = \frac{\ln(e^{x\ln(a)})}{\ln(a)} = \frac{x\ln(a)}{\ln(a)} = x.$$

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ et son image est $\mathbb{R}_{>0}$.

b) Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$f(n) = e^{n\ln(a)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^n = a^n.$$

Soit $r = p/q$ un nombre rationnel ($p, q \in \mathbb{Z}$). Alors

$$f(r) = f(p/q) = e^{(p/q)\ln(a)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^{p/q} = a^{p/q} = a^r.$$

c) $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln(a)} = e^{x\ln(a)} \cdot e^{y\ln(a)} = a^x a^y$

d) $(ab)^x = e^{x\ln(ab)} = e^{x(\ln(a)+\ln(b))} = e^{x\ln(a)}e^{x\ln(b)}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^x = e^{x\ln(a/b)} = e^{x(\ln(a)-\ln(b))} = \frac{e^{x\ln(a)}}{e^{x\ln(b)}} = \frac{a^x}{b^x}.$

e) Comme $a^x = f(x) = e^{x\ln(a)}$, on a

$$f'(x) = \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x,$$

qui, pour $a > 1$, est toujours strictement positive. Alors que pour $a \in]0,1[$, la dérivée f' est toujours strictement négative.

f) On a directement

$$f''(x) = \ln(a)^2 e^{x\ln(a)}.$$

qui est toujours strictement positive. Ainsi, f est partout convexe.

g) On a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x\ln(a)}}{e^{a\ln(x)}} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(a)-a\ln(x)} = e^{\lim_{x\to\infty}(x\ln(a)-a\ln(x))},$$

où, pour la dernière étape du calcul, on a utilisé la continuité de $x \mapsto e^x$.

Divisons les cas : Si $a > 1$. Comme la dérivée de

$$x \mapsto (x\ln(a) - a\ln(x)) \quad \text{est} \quad x \mapsto \left(\ln(a) - \frac{a}{x}\right),$$

qui est toujours strictement supérieure à une constante > 0 pour x suffisamment grand, on a, en utilisant le théorème des accroissement finis,

$$\lim_{x\to\infty} (x\ln(a) - a\ln(x)) = \infty.$$

Ainsi, dans ce cas,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^a} = \infty.$$

On traite le cas $a < 1$, de manière similaire : on montre que $\lim\limits_{x\to\infty} (x\ln(a) - a\ln(x)) = -\infty$, et donc $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^a} = 0$.