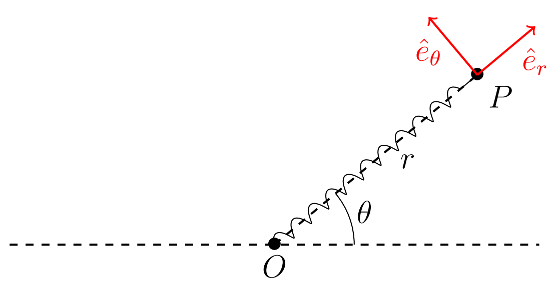
Corrigé du Minitest 3

Ressort fragile – (11 points)

a) (4 points au total)
Tant que le ressort n'est pas cassé la force est centrale car toujours dirigée suivant $\vec{OP}$, donc le moment cinétique est conservé. Lorsque le ressort est cassé aucune force n'est plus exercée sur le point matériel et donc le moment cinétique est également conservé. Dans $\vec{L}_O$ est conservé dans tous les cas $\boxed{\text{1 point}}_{\text{A}}$. Le mouvement s'effectue donc dans un plan $\boxed{\text{1 point}}_{\text{B}}$, le plan perpendiculaire à $\vec{L}_O$.
On travaille en coordonnées polaires dans ce plan :



Dans ce cas :

$$\begin{cases} \vec{r} = r\hat{e}_r \\ \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \end{cases} \qquad \boxed{\text{1 point}}_{\text{C}} \tag{1}$$

et le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{L}_O = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z \,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{D}} \tag{2}$$

b) (2 points au total)
La force exercée par le ressort est conservative, donc pour un mouvement restreint dans la région $r \leq R$, l'énergie est conservée, et l'énergie potentielle est celle d'un ressort d'allongement r et donc $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}kr^2$. $\boxed{\text{1 point}}_{\text{E}}$
L'énergie mécanique totale s'écrit

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2mr^2} + V(r). \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{F}} \tag{3}$$

c) (6 points au total)
On cherche une condition pour laquelle $r(t) \leq R$ pour tout temps t. Les trajectoires qui vérifient cette condition explorent uniquement le cas $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}kr^2$. Comme l'énergie mécanique totale est

conservée $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{G}}$, pour une énergie initiale E et un moment cinétique initial L, on a en tout temps

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \geq 0 \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{H}} \tag{4}$$

et les distances extrémales r_e atteints au cours du mouvement vérifient

$$E - \frac{L^2}{2mr_e^2} - \frac{1}{2}kr_e^2 = 0 \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{I}} \tag{5}$$

La condition cherchée est $r_e \leq R$. On doit résoudre

$$Er_e^2 - \frac{L^2}{2m} - \frac{1}{2}kr_e^4 \quad = \quad 0 \tag{6}$$

qui est une équation du second degré pour r_e^2.

$$\Delta \quad = \quad E^2 - \frac{L^2k}{m} \tag{7}$$

Il existe des solutions uniquement si $E \geq \sqrt{\frac{L^2k}{m}}$. Les solutions s'écrivent (donner le point si la solution est donnée pour r_e ou pour r_e^2) :

$$r_e^2 \quad = \quad \frac{1}{k}\left(E \pm \sqrt{E^2 - \frac{L^2k}{m}}\right) \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{J}} \tag{8}$$

et la condition s'écrit

$$\frac{E}{k}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{L^2k}{E^2m}}\right) \quad \leq \quad R^2 \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{K}} \tag{9}$$

ce qui peut se ré-exprimer sous la forme :

$$E \quad \leq \quad \frac{1}{2}kR^2 + \frac{L^2}{2mR^2} \tag{10}$$

On peut également faire un raisonnement graphique simple : l'énergie mécanique est conservée $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{G}}$, et la fonction du potentiel effectif $V_e(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$ est croissante $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{H}}$ pour r suffisamment grand, donc dans ce cas $r \leq R$ implique $V_e(r) \leq V_e(R)$ et donc $E \leq V_e(R)$ $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{K}}$. Par ailleurs, l'énergie doit être supérieure au minimum de la fonction $V_e(r)$. Le minimum est obtenu en R_{m} par

$$\frac{dV_e}{dr}(R_{\mathrm{m}}) \quad = \quad kR_{\mathrm{m}} - \frac{L^2}{mR_{\mathrm{m}}^3} = 0 \tag{11}$$

$$R_{\mathrm{m}}^2 \quad = \quad \sqrt{\frac{L^2}{mk}} \tag{12}$$

et donc

$$E \quad \geq \quad V_e(R_m) \tag{13}$$

$$E \quad \geq \quad \sqrt{\frac{L^2k}{m}} \tag{14}$$

$\boxed{\text{Donner le point s'il est clairement indiqué que la fonction a un minimum (p.ex. un graphique)}}$

L'élongation maximale est atteinte pour la plus grande des solutions de l'équation $E = V_e(r_e)$, équivalente à l'équation (5) $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{I}}$, et la solution est l'équation (8) $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{J}}$.