Exercice 1.

a) Cette affirmation est vraie. En effet, considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} a & k\cdot a \\ b & k\cdot b \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont proportionnelles (plus précisément : la 2e colonne est égale à k fois la 1re). Le déterminant de cette matrice est alors égal à

$$\begin{vmatrix} a & k\cdot a \\ b & k\cdot b \end{vmatrix} = a\cdot k\cdot b - k\cdot a\cdot b = 0.$$

On raisonne de même si la première colonne est égal à k fois la seconde.

b) Cette affirmation est également vraie car

$$\begin{vmatrix} a & b \\ k\cdot a & k\cdot b \end{vmatrix} = a\cdot k\cdot b - b\cdot k\cdot a = 0.$$

On raisonne de même si la première ligne est égale à k fois la seconde.

c) Cette affirmation est fausse au vu du contre-exemple suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot 1 - 1\cdot 1 = -1.$$

Exercice 2.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot 8 - 4\cdot(-7) = 52.$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot 0 - 8\cdot(-3) = 24.$

c) $\begin{vmatrix} 18 & 36 \\ -9 & -18 \end{vmatrix} = 0$ car les deux lignes sont proportionnelles.

d) $\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0\cdot 5 - 8\cdot 0 = 0.$

e) $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(-4) - 3\cdot 7 = -1.$

f) $\begin{vmatrix} a & b \\ a+b & a+b \end{vmatrix} = a(a+b) - b(a+b) = (a+b)(a-b).$

g) $\begin{vmatrix} x-y & y \\ x-y & x \end{vmatrix} = (x-y)x - y(x-y) = (x-y)^2.$

h) $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix} = (x+y)(x+y) - (x-y)(x-y) = x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2 = 4xy.$

Exercice 3.

a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13$, $D_x = \begin{vmatrix} 35 & 5 \\ 27 & 2 \end{vmatrix} = -65$, $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 3 & 27 \end{vmatrix} = -78$. Comme $D \neq 0$, les formules de Cramer s'appliquent,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-65}{-13} = 5,$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-78}{-13} = 6$$

et donc $S = \{(5,6)\}$.

b) $D = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} = -55$, $D_x = \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 19 & 4 \end{vmatrix} = 165$, $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -9 & 19 \end{vmatrix} = 110$. Comme $D \neq 0$, les formules de Cramer s'appliquent,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{165}{-55} = -3,$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{110}{-55} = -2$$

et donc $S = \{(-3, -2)\}$.

c) $D = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = 36$, $D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18$, $D_y = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = -12$. Comme $D \neq 0$, les formules de Cramer s'appliquent,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-12}{36} = -\frac{1}{3}$$

et donc $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$.

d) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -3$. Comme $D = 0$ et $D_x \neq 0$, le système est impossible et $S = \emptyset$.

e) $D = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = 0$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 0$. Comme $D = D_x = D_y = 0$, le système est indéterminé, $S = \{(1-2t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

f) $D = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -42$, $D_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -14$, $D_y = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Comme $D \neq 0$, les formules de Cramer s'appliquent,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{-42} = \frac{1}{3},$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{-42} = 0$$

et donc $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, 0\right)\right\}$.

Exercice 4. La manière la plus simple pour résoudre ces systèmes est sans doute la méthode de Cramer.

a) Nous calculons donc d'abord les trois déterminants

$$D = \begin{vmatrix} m+1 & 2 \\ 1 & m+2 \end{vmatrix} = (m+1)(m+2) - 2 = m^2 + 3m = m(m+3)\,;$$
$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ m+3 & m+2 \end{vmatrix} = 3(m+2) - 2(m+3) = m\,;$$
$$D_y = \begin{vmatrix} m+1 & 3 \\ 1 & m+3 \end{vmatrix} = (m+1)(m+3) - 3 = m^2 + 4m = m(m+4).$$

Lorsque $m \neq 0, -3$, D est non nul et les formules de Cramer donnent la solution $S = \{(\frac{1}{m+3}, \frac{m+4}{m+3})\}$.
Lorsque $m = -3$, on a $D = 0$, mais $D_x = -3$ est différent de zéro. Le système est donc impossible.
Enfin, lorsque $m = 0$, on a $D = 0$, $D_x = 0$ et $D_y = 0$. Le système est indéterminé. Les solutions sont données par l'équation $x + 2y = 3$. Ainsi lorsque $y = t$, $x = 3 - 2t$, si bien que $S = \{(3-2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

b) $D = \begin{vmatrix} 1 & m(m-1) \\ 1 & -(m^2-1) \end{vmatrix} = -(m^2-1) - m(m-1) = -m^2 + 1 - m^2 + m = -2m^2 + m + 1 = -(m-1)(2m+1)$,

$D_x = \begin{vmatrix} 2m^2 & m(m-1) \\ m(1-m) & -(m^2-1) \end{vmatrix} = -2m^2(m^2-1) - m(m-1)m(1-m) = -2m^4 + 2m^2 + m^4 - 2m^3 + m^2 = -m^4 + 3m^2 - 2m^3 = -m^2(m^2 + 2m - 3) = -m^2(m+3)(m-1)$,

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2m^2 \\ 1 & m(1-m) \end{vmatrix} = m - m^2 - 2m^2 = m - 3m^2 = -m(3m-1)$.

Pour $m \neq 1, -\frac{1}{2}$ on a $D \neq 0$ et les formules de Cramer s'appliquent,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-m^2(m+3)(m-1)}{-(m-1)(2m+1)} = \frac{m^2(m+3)}{(2m+1)},$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-m(3m-1)}{-(m-1)(2m+1)} = \frac{m(3m-1)}{(m-1)(2m+1)}.$$

Pour $m = 1$ ou $m = -\frac{1}{2}$ on a $D = 0$, $D_y = -2$ ou $D_y = -\frac{5}{4}$ et donc le système est impossible.

c) $D = \begin{vmatrix} (m+1)^2 & m^2-1 \\ (m-1)^2 & -(m^2-1) \end{vmatrix} = -(m+1)^2(m^2-1) - (m-1)^2(m^2-1) = -(m^2-1)\left[(m+1)^2 + (m-1)^2\right] = -(m^2-1)(m^2+2m+1+m^2-2m+1) = -2(m-1)(m+1)(m^2+1)$,
$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & m^2-1 \\ (m-1)^2 & -(m^2-1) \end{vmatrix} = -(m^2-1)(m+1) - (m-1)^2(m^2-1) = -(m^2-1)\left[m+1+(m-1)^2\right] = -(m^2-1)(m+1+m^2-2m+1) = -(m-1)(m+1)(m^2-m+2)$,
$D_y = \begin{vmatrix} (m+1)^2 & m+1 \\ (m-1)^2 & (m-1)^2 \end{vmatrix} = (m+1)^2(m-1)^2 - (m-1)^2(m+1) = (m-1)^2\left[(m+1)^2 - (m+1)\right] = (m-1)^2(m^2+2m+1-m-1) = (m-1)^2(m^2+m) = m(m-1)^2(m+1)$.
Pour $m \neq -1, 1$ on a $D \neq 0$ et les formules de Cramer s'appliquent,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-(m-1)(m+1)(m^2-m+2)}{-2(m-1)(m+1)(m^2+1)} = \frac{(m^2-m+2)}{2(m^2+1)},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{m(m-1)^2(m+1)}{-2(m-1)(m+1)(m^2+1)} = -\frac{m(m-1)}{2(m^2+1)}.$$

Pour $m = 1$ ou $m = -1$, on a $D = D_x = D_y = 0$ et donc le système est indéterminé. Pour $m = 1$, on trouve $x = \frac{1}{2}$ et y peut être quelconque, donc $S = \{(\frac{1}{2}, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Pour $m = -1$, on trouve $S = \{(1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

d) $D = \begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ m+5 & 3m+9 \end{vmatrix} = (m-1)(3m+9) - (m+5)(m-2) = 3m^2 + 9m - 3m - 9 - (m^2 - 2m + 5m - 10) = 2m^2 + 3m + 1 = (2m+1)(m+1)$,
$D_x = \begin{vmatrix} -5m-10 & m-2 \\ 10 & 3m+9 \end{vmatrix} = (-5m-10)(3m+9) - 10(m-2) = -15m^2 - 45m - 30m - 90 - 10m + 20 = -15m^2 - 85m - 70 = -5(3m^2 + 17m + 14) = -5(m+1)(3m+14)$,
$D_y = \begin{vmatrix} m-1 & -5m-10 \\ m+5 & 10 \end{vmatrix} = 10(m-1) + (m+5)(5m+10) = 10m - 10 + 5m^2 + 10m + 25m + 50 = 5m^2 + 45m + 40 = 5(m^2 + 9m + 8) = 5(m+1)(m+8)$.
Pour $m \neq -1, -\frac{1}{2}$ on a $D \neq 0$ et les formules de Cramer s'appliquent,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5(m+1)(3m+14)}{(2m+1)(m+1)} = -\frac{5(3m+14)}{2m+1},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{5(m+1)(m+8)}{(2m+1)(m+1)} = \frac{5(m+8)}{2m+1}.$$

Pour $m = -\frac{1}{2}$ on a $D = 0$, $D_y = \frac{75}{4}$ et donc le système est impossible. Pour $m = -1$ on a $D = D_x = D_y = 0$ et donc le système est indéterminé, et en posant par exemple $y = t$, $S = \{(\frac{1}{2}(5 - 3t), t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.