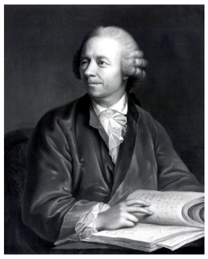


Cours Euler

Module 3

Nombres complexes

M. Schneider

2021-2022

I. Nombres complexes

1 Nombres imaginaires

Jusqu'au XVIème siècle environ, on ne considérait pas que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de *solution réelle*, mais qu'elle n'a simplement aucune solution. Mais les travaux de Cardano, Tartaglia et Bombelli - que nous retrouverons tout à l'heure - motivèrent l'invention (ou la découverte ?) d'un nombre imaginaire i ayant la propriété que $i^2 = -1$. En d'autres termes, i est une racine carrée de -1. C'est Descartes qui a baptisé ce nombre comme étant *imaginaire*, Euler qui l'a noté i et Gauss qui a introduit la terminologie "nombre complexe".

Définition 1.1. L'ensemble $\mathbb{C}$ des *nombres complexes* est l'ensemble $\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. On appelle a la *partie réelle* et b la *partie imaginaire* de $a + bi$.

Ainsi $3i$ est un nombre complexe purement imaginaire car sa partie réelle est nulle.
et 4, π, 2,5 peuvent être vus comme des nombres complexe t.q. b=0.

Un nombre réel est aussi un nombre complexe, mais sa partie imaginaire est nulle. On peut construire des nombres complexes de la forme $1 + i$, $-\frac{1}{2} + 1000i$ ou encore $\sqrt{13} - \pi i$. Ce que nous remarquons tout de suite, c'est que $\mathbb{C}$ ressemble à s'y méprendre à $\mathbb{R}^2$ puisque tout nombre complexe $a + bi$ est donné par un couple de nombres réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 1.2. *Les nombres complexes forment un espace vectoriel réel. La somme est donnée par la formule $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ et l'action de $\mathbb{R}$ est donnée par la formule $\alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi$ (où a, b, c, d et α sont des nombres réels).*

Mais l'intérêt des nombres complexes ne se trouve pas dans sa structure d'espace vectoriel ! En effet, si nous avons introduit le nombre i, c'est parce que $i^2 = -1$. Ce qui nous démange, c'est donc de multiplier les nombres complexes entre eux.

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ est un corps
on va retrouver cette structure dans $(\mathbb{C},+,\cdot)$

Définition 1.3. Soit $a+bi$ et $c+di$ deux nombres complexes. Le *produit* $(a+bi)(c+di)$ est donné par la formule $(ac-bd)+(ad+bc)i$.

car $(a+bi)(c+di)$ s'effectue en respectant les règles de $+$ et $\cdot$ dans $\mathbb{R}$

$$(a+bi)(c+di) \overset{①}{=} ac + a\cdot di + bic + bidi \overset{②}{=} (ac + bd\underbrace{i^2}_{-1}) + (adi + bci) \overset{③}{=} (ac-bd)+(ad+bc)i$$

① distributivité
② commutativité de $\cdot$ et $+$
③ associativité + mise en évidence

Exemple 1.4. On peut calculer les puissances de i :

$$i^0 = 1,\quad i^1 = i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = -i,\quad i^4 = 1 \implies i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k \\ i & \text{si } n = 4k+1 \\ -1 & \text{si } n = 4k+2 \\ -i & \text{si } n = 4k+3 \end{cases},\quad k \in \mathbb{N}$$

On a aussi $(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1 + 2i + \underbrace{i^2}_{=-1} = 2i$

Muni de cette multiplication, les nombres complexes forment un anneau. Nous avons choisi la seule définition qui rende la multiplication distributive par rapport à l'addition, associative et commutative. L'unité de $\mathbb{C}$ est le nombre réel 1 puisque $1\cdot(a+bi) = a+bi$. Mais on a encore bien mieux...

Théorème 1.5. *Les nombres complexes forment un corps.*

→ Vérifier que tout élément non nul admet un inverse pour $\cdot$.

Démonstration. Nous devons comprendre comment trouver l'inverse d'un nombre complexe non nul. Soit donc $a+bi$ un nombre complexe différent de zéro. Nous pourrions simplement chercher le nombre complexe $c+di$ qui vérifie $(a+bi)(c+di) = 1$ en résolvant un système d'équations donné par la formule du produit dans $\mathbb{C}$, mais nous allons être plus astucieux.

Identité remarquable : $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

$$\implies \underbrace{(a+bi)(a-bi)}_{=a^2+b^2}\,\frac{1}{a^2+b^2} = 1$$

$\implies$ l'inverse de $a+bi$ est $\dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}\cdot i$ □

Exemple 1.6. L'inverse de i est $-i$ car $i = 0 + 1i$, donc $a = 0$, $b = 1$ $\Rightarrow$ $\frac{0}{a^2+b^2} - \frac{1}{a^2+b^2} i = -i$
L'inverse de $1 + i$ est le nombre complexe $(a = b = 1)$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$

Définition 1.7. Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Son *conjugué complexe* est le nombre $\bar{z} = a - bi$. Il a même partie réelle, mais sa partie imaginaire est l'opposé de celle de z.

Exemple 1.8. Un exemple historique. Comment diviser 10 en deux parties dont le produit vaut 40 ? C'est une question que se pose Cardano dans le Chapitre 37 de son "Ars Magna". Cela a l'air d'être impossible puisque si on divise 10 en deux parties égales, 5 et 5, le produit vaut 25 et il manque donc 15 pour arriver à 40... $(10-x)\cdot x$

Si on pose $x = 5 + \sqrt{15}\, i$ et $y = 5 - \sqrt{15}\, i$
La somme vaut bien 10 et
Le produit $5^2 + (\sqrt{15})^2 = 25 + 15 = 40$
On a résolu le problème de Cardano !

L'intérêt de ce calcul est lié à la factorisation du polynôme $x^2 + \overset{S}{10}x + \overset{P}{40}$. Le discriminant est négatif et les formules de Viète nous disent que les racines sont deux nombres dont la somme vaut 10 et le produit 40. Grâce aux nombres complexes on peut factoriser ce polynôme :

$$x^2 + 10x + 40 = (x - 5 - \sqrt{15}\, i)(x - 5 + \sqrt{15}\, i)$$

Pour diviser un nombre complexe par un autre, la méthode la plus rapide en général est d'amplifier la fraction par le conjugué complexe du dénominateur (afin d'éliminer les parties imaginaires au dénominateur) :

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Exemple 1.9.

$$\frac{2-3i}{1+2i} = \frac{(2-3i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-4i-3i-6}{1+4} = \frac{-4-7i}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5} i$$

2 Représentation géométrique des nombres complexes

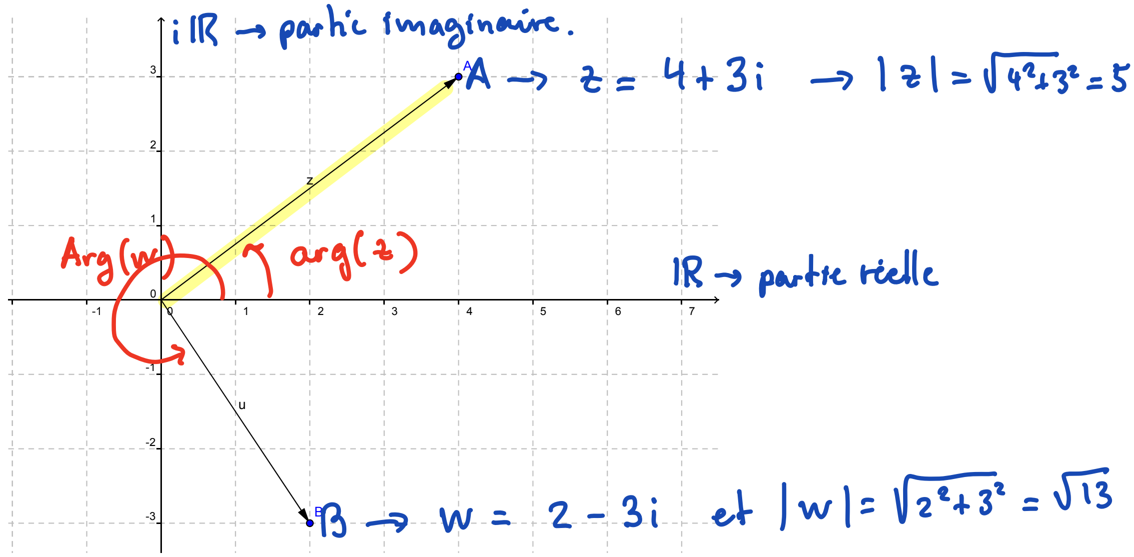
Nous avons vu que les nombres complexes peuvent être identifiés au plan réel $\mathbb{R}^2$ en faisant correspondre le nombre complexe $a + bi$ au point $(a; b)$ du plan. Ceci donne l'idée de représenter géométriquement les nombres complexes comme un plan. Mais puisque l'essentiel de la structure de $\mathbb{C}$ se trouve dans la multiplication, nous devons comprendre à quoi correspond géométriquement le produit. Pour cela nous introduisons deux grandeurs géométriques associées à un nombre complexe.

Définition 2.1. Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. Le *module* ou la *norme* de z est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Reconnaissez-vous ce module ?

c'est la norme du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Dans le "plan complexe", on représente donc le nombre $a + bi$ par le point $(a; b)$ ou par la flèche d'origine $(0; 0)$ et d'extrémité $(a; b)$, comme ceci :



La norme de $z = 4 + 3i$ sur cette illustration vaut 5 et celle de $u = 2 - 3i$ vaut $\sqrt{13}$. Si nous voulons tout savoir sur un nombre complexe, la norme ne suffit pas. Si par exemple nous savons que la norme de z vaut 1, ce nombre peut se trouver n'importe où sur le cercle centré en l'origine et de rayon 1. Pour connaître z, nous devons encore donner un angle.

Définition 2.2. Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. L'*argument* de z est l'angle $\arg(z)$, calculé dans le sens trigonométrique, entre le demi-axe réel positif et z.

Exemple 2.3.

- L'argument d'un nombre réel positif vaut 0
- Celui d'un nombre réel négatif vaut π
- L'argument de i vaut $\frac{\pi}{2}$
- Celui de $1 + i$ vaut $\frac{\pi}{4}$

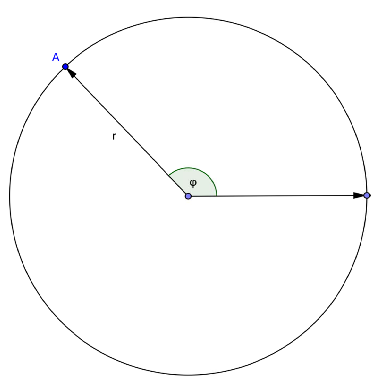
On peut donc décrire un nombre complexe de deux façons. La manière cartésienne est de donner ses coordonnées dans le plan complexe. La *forme polaire* est de donner son module et son argument.

Proposition 2.4. *Soit $z = a + bi$ un nombre complexe, $r = |z|$ son module et $\phi = arg(z)$ son argument. Alors $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$.* $r \text{ cis } \phi$

Démonstration.

$z_1 = \cos\phi + i\sin\phi$ se trouve sur le cercle trigonométrique puisque $|z_1| = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$

Son argument vaut ϕ.
Par suite $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ a donc le même argument et son module vaut r.



□

Comment se traduit l'opération de produit dans le plan complexe ? Prenons deux nombres complexes $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ et $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$. Calculons le produit

$$z \cdot w = r(\cos\phi + i\sin\phi) \cdot s(\cos\psi + i\sin\psi) = rs(\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\psi + i\sin\psi),$$

où nous avons utilisé la commutativité et l'associativité du produit. Développons maintenant

$$z \cdot w = rs(\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi + (\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi)i)$$

Que reconnaissons-nous immédiatement ? La partie réelle et la partie imaginaire sont identifiables comme le cosinus et le sinus de la somme des angles grâce aux formules d'addition du sinus et du cosinus ! Par conséquent,

$$z \cdot w = rs\left(\cos(\phi + \psi) + i\sin(\phi + \psi)\right).$$

Nous venons de démontrer que le module du produit de deux nombres complexes est le produit des modules et l'argument du produit est la somme des arguments.

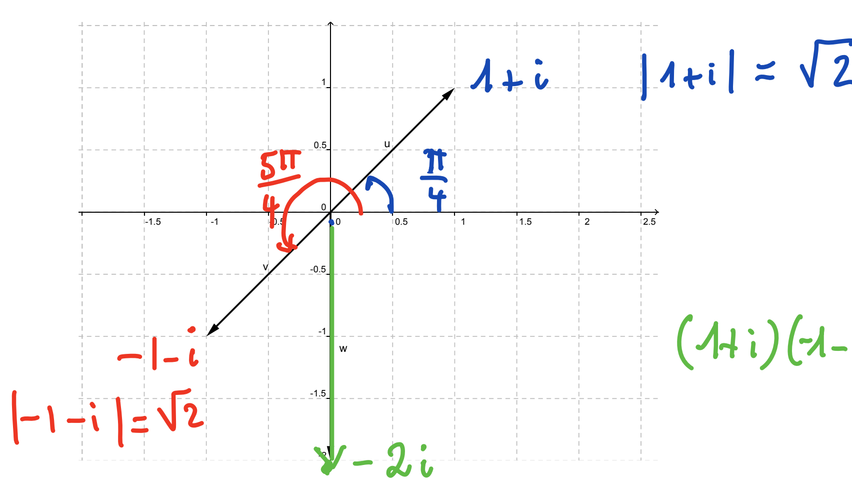
Théorème 2.5. *Considérons deux nombres complexes z et w. Alors*

a) $|zw| = |z||w|$;

b) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Exemple 2.6. Calculons le produit de $1 + i$ et $-1 - i$.

$(1+i)(-1-i) = (-1+1) + (-1-1)i = -2i$ ✓



$(1+i)(-1-i) = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4}\right)$

$= 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

3 Résolution d'équations

L'une des raisons d'introduire les nombres complexes est d'ajouter des solutions "imaginaires" à l'équation $z^2 + 1 = 0$. Qu'en est-il des autres équations quadratiques ? Et les équations de degré supérieur ?

Théorème 3.1. *Tout polynôme de degré 2 à coefficients réels peut être décomposé*

$$ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s),$$

où r et s sont des racines complexes. conjuguées !

Démonstration. C'est la formule du trinôme qui nous donne la valeur des racines r et s. En effet l'expression $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ n'a pas toujours un sens dans $\mathbb{R}$, mais lorsqu'on travaille dans $\mathbb{C}$ et que Δ négatif, il faut lire $\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|}i$. □

Exemple 3.2. Considérons le polynôme $x^2 - 4x + 20$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 20 = -64 = (8i)^2$

$\Rightarrow$ zéros du polynôme sont $\dfrac{4 \pm 8i}{2} = 2 \pm 4i$

et $x^2 - 4x + 20 = (x - 2 - 4i)(x - 2 + 4i)$

— Lorsque nous ne connaissions que les nombres naturels, l'expression $x + 1 = 0$ n'avait pas de solution. Il nous a fallu découvrir les nombres entiers relatifs pour résoudre ce problème.
— A ce moment, l'équation $2x - 3 = 0$ n'avait pas de solution et nous avons construit les nombres rationnels.
— Cela n'était toujours pas suffisant puisque l'équation $x^2 - 2 = 0$ n'a pas de solution rationnelle et nous avons décidé de travailler avec les nombres réels.

On pourrait donc penser qu'en introduisant la racine carrée de -1, nous avons trouvé un moyen de résoudre toutes les équations quadratiques. Mais qu'en est-il des autres équations ? Une propriété absolument remarquable est qu'on peut s'arrêter ici. dans l'extension des ensembles de nombres.

Théorème 3.3. Théorème fondamental de l'algèbre (Gauss, 1800).
Tout polynôme $p(x)$ de degré $n > 1$ admet au moins une racine complexe. Par conséquent, il existe des racines $r_1, \ldots, r_n$ dans $\mathbb{C}$ telles que $p(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$.

Nous ne démontrerons pas ce théorème parce que la démonstration dépasse le cadre de ce cours. Mais où vivent les coefficients de $p(x)$?
Ils peuvent être dans $\mathbb{R}$, mais le résultat est encore vrai pour un polynôme $p(x) \in \mathbb{C}[x]$. On dit que le corps $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*.

Exemple 3.4. Décomposons le polynôme $x^5 - 1$. en produit de facteurs de degré 1.

$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ et après ? ...

$x^5 - 1 = 0 \iff x^5 = 1$

On aimerait trouver les 5 racines cinquième de 1 dans $\mathbb{C}$.

En forme polaire, chaque solution s'écrit $r(\cos\phi + i\sin\phi)$.

On veut donc résoudre $\left(r(\cos\phi + i\sin\phi)\right)^5 = 1$

$\iff r^5(\cos(5\phi) + i\sin(5\phi)) = 1 + 0i$

$\Rightarrow r^5 = 1$ et $\cos(5\phi) = 1$ et $\sin(5\phi) = 0$

$\Rightarrow r = 1$ et $5\phi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow r = 1$

$\phi = \dfrac{2k\pi}{5}$

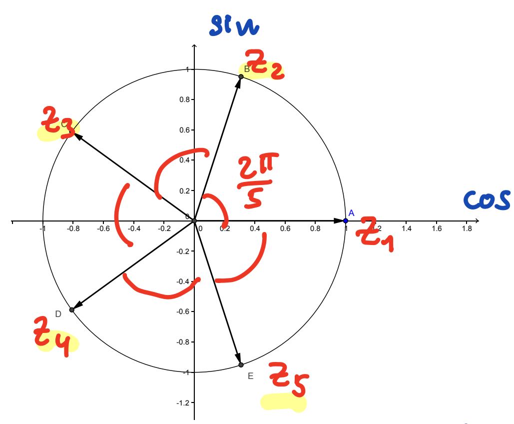
$k=0 \rightarrow \phi_1 = 0$

$k=1 \rightarrow \phi_2 = \dfrac{2\pi}{5}$

$k=2 \rightarrow \phi_3 = \dfrac{4\pi}{5}$

$k=3 \rightarrow \phi_4 = \dfrac{6\pi}{5}$

$k=4 \rightarrow \phi_5 = \dfrac{8\pi}{5}$ et si $k=5 \rightarrow \phi_6 = \dfrac{10\pi}{5} = 2\pi$



Remarque :
Les solutions complexes sont conjuguées deux à deux :
$\bar{z}_2 = z_5$ et $\bar{z}_3 = z_4$

Pour terminer, nous retrouvons nos amis mathématiciens du 16ème siècle et la raison qui les a poussés à considérer les racines de nombres négatifs.

$\bar{z}_2 = z_5$

$$\Rightarrow x^5 - 1 = (x-1)\left(x - 1\,\mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{5}\right)\left(x - 1\,\mathrm{cis}\,\frac{4\pi}{5}\right)\left(x - 1\,\mathrm{cis}\,\frac{6\pi}{5}\right)\left(x - 1\,\mathrm{cis}\,\frac{8\pi}{5}\right)$$

$\bar{z}_3 = z_4$

On note que

$(x - z_2)(x - z_5) = x^2 - x(z_2 + z_5) + z_2 \cdot z_5 \overset{(*)}{=} x^2 - x\,2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1$

Polynôme de degré 2 à coefficients réels

Comme $\bar{z}_2 = z_5$, $z_2 + z_5 = 2 \cdot \mathrm{Re}(z_2) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $z_2 \cdot z_5 = z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_2|^2 = 1$

Exemple 3.5. Cardano trouva un moyen de ramener la résolution de toute équation cubique en une équation de la forme $x^3 + bx + c = 0$. Tartaglia savait résoudre une telle équation à l'aide de sa formule (secrète) :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}.$$

Que se passe-t-il si on utilise cette formule pour résoudre $x^3 - 15x - 4 = 0$? Bombelli remarque qu'on trouve comme solution

$$\sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}},$$

et en simplifiant l'écriture :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Il semble donc qu'il n'y a pas de solution réelle à cette équation puisque la formule de Tartaglia fait intervenir des racines de nombres réels négatifs... Mais Bombelli soupçonne que l'équation a une solution réelle. Il persévère et se rend compte que si $\sqrt{-1}$ est un nombre qui a un sens, alors

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}.$$

et $(2-\sqrt{-1})^2 =$ .... $= 2 - 11\sqrt{-1}$

C'est ce qui apparaît sous la première racine cubique ! Par conséquent, la solution est $(2+\sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$. En conclusion, il faut utiliser les nombres imaginaires même pour résoudre des équations qui ont des solutions réelles !